



*César Rodrigo Fernández**
Prof Auxiliar

RESUMO

A procura de formas óptimas na natureza impregnou sempre a física, matemática e a filosofia natural em geral. Esta procura levou ao nascimento dum ramo da matemática, o cálculo de variações, cujos alicerces foram postos pelos irmãos Bernoulli e por Euler no início do século XVIII.

Há muitos detalhes técnicos no cálculo de variações de difícil compreensão para os não matemáticos. Este tipo de detalhes levam frequentemente à ideia de que as teorias matemáticas estão afastadas dos problemas urgentes de cada dia, e que portanto são inúteis. Um exemplo de trajectórias óptimas para veículos em presença dum radar mostrará como, com técnicas matemáticas de cálculo, as ideias gerais do cálculo de variações levam a resultados de interesse numa área concreta (neste caso, ligada ao cálculo de riscos), e como um estudo em maior profundidade pode conduzir a resultados de importância real e palpável.

1. Introdução

Virgílio relata-nos na Eneida como Dido, princesa fenícia de Tiro, comprou umas terras ao rei Jarbas no lugar que seria Cartago (Séc. IX a.C.). A lenda conta que este aceitou a criação da colónia fenícia, cuja área total não deveria

* Docente na Academia Militar das disciplinas de Álgebra Linear e Matemática Computacional.

superar aquela delimitada com uma pele de boi, em troca do pagamento duma renda. Após fechar o acordo nestes termos, Dido dispôs que a pele fosse



Figura 1: A rainha Dido e a Fundação de Cartago (Imagem tomada de www.ma.utexas.edu/user/smmg/Spring2004Talks.html)

cortada em finas tiras que foram atadas para formar uma corda, elegeu terra junto do mar, de forma que a costa servisse como um limite adicional ao proporcionado por esta corda, e determinou que a sua fronteira terrestre tivesse forma circular, num lugar ainda hoje chamado Byrsa (“pele de boi” em grego). Não seria até os trabalhos de Zenodoro (Séc I a.C., aprox.) que encontramos um estudo matemático rigoroso de aquelas figuras que têm um perímetro dado, tema que não tinha sido estudado por nenhum dos grandes géometras gregos. Nos seus escritos Zenodoro terá contribuído com a primeira prova de que o círculo contém maior área que qualquer polígono com o mesmo perímetro. Dido, portanto, tomou a decisão correcta.

A história da ciência mostra como a procura de formas óptimas não é nova, encontramos-la em trabalhos de Aristóteles sobre o movimento dos corpos celestes (Aristóteles, *Acerca do céu*, Séc. IV a.C.). Um outro exemplo com interesse mais prático está dado pela procura de rotas óptimas de navegação, onde o matemático português Pedro Nunes fez o seu contributo ao mostrar que a curva de navegação de rumo fixo (com respeito ao norte geográfico) não proporciona uma rota óptima, senão a curva por ele descrita e que hoje é conhecida como loxodroma. Os trabalhos pioneiros deste matemático marcaram uma época de recuperação do rigor e curiosidade científica, também no tratamento do óptimo,

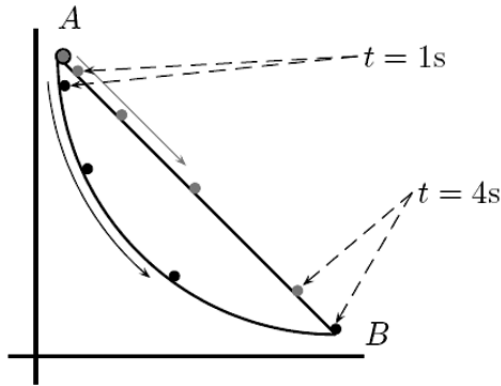


Figura 2: Galileu: Um corpo em queda livre ao longo duma curva chegará antes ao destino se segue um arco de circunferência do que se segue uma linha recta.

que permitiria estabelecer já a base da iminente explosão de conhecimento que havia de produzir-se durante a revolução científica do século XVII.

É neste período, nos estudos do problema de queda livre de corpos por Galileu (década de 1630), quando este constatou como, ao soltar um corpo que devia deslizar-se ao longo dum arco de circunferência e compará-lo com outro que se deslizava ao longo duma recta entre dois pontos dados, contra o que pudessemos pensar, o corpo em queda rectilínea chegava com atraso com respeito ao que seguia a trajectória curva. Galileu pôde assim deduzir que a trajectória de descida mais rápida entre dois pontos dados (curva braquistocrona) não é a linha recta, argumentando – erroneamente – que a dita trajectória óptima seria a dum certo arco de circunferência.

O problema exposto por Galileu foi o embrião duma das sub-áreas da matemática que mais fértil se mostrou nos seus 300 anos de existência: o cálculo de variações, que desde a sua revisão na óptica da teoria de controlo nascida nos anos 50 do século XX, entrou nos mais variados ramos da ciência e tecnologia modernas, como mostra destacada de como novos problemas práticos podem revitalizar áreas antigas de investigação e ilustrando a utilidade da matemática existente quando introduzida em novos contextos.

Foi em 1696 quando, no Acta Eruditorum, o matemático suiço Johann Bernoulli lançou à comunidade matemática o desafio de resolver precisamente este “PROBLEMA NOVO, cuja solução se convida aos matemáticos: Dados dois

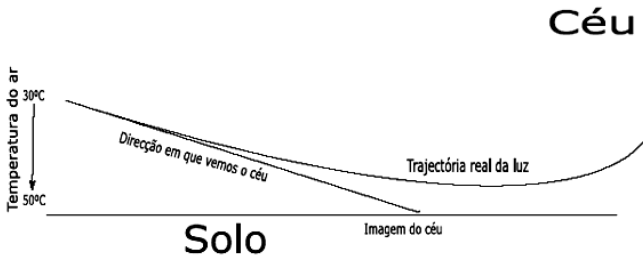


Figura 3: *Fermat: A luz nem sempre segue uma linha recta, segue sim a linha que permite chegar ao destino no mínimo tempo. Uma consequência desta lei é a existência de miragens quando a luz atravessa uma camada de ar com densidade não uniforme, variando a sua velocidade ao longo do percurso.*

pontos num plano vertical A e B, associar a um móvel M um caminho AMB pelo qual desce pela sua gravidade, e se move a partir do ponto A no menor tempo possível até ao outro ponto B”. Como era comum nesta época, Johan dispunha duma resposta e simplesmente indicava à comunidade matemática este facto, desafiando-os a resolver o problema.

A demonstração original de Bernoulli baseava-se numa analogia deste problema com um princípio de Fermat. Em 1662 Fermat tinha formulado o seu princípio de tempo mínimo, que estabelece que a luz, quando se move num meio onde a sua velocidade é variável, segue sempre o caminho que suponha o menor tempo. Bernoulli deduziu que a curva solução do problema deveria coincidir com a trajectória dum feixe de luz num meio plano onde a velocidade da luz esteja dada pela raiz quadrada da altura sobre o eixo dos yy (veja-se [6] para uma descrição em detalhe), e fez uso deste modelo e das leis físicas de refração (a lei de Snell) como ponto de partida do problema, dividindo o médio em várias capas horizontais onde a velocidade da luz variava dumas a outras, fazendo depois tender este número de capas ao infinito.

Devemos indicar que a natureza deste problema era diferente da dos problemas de máximos e mínimos que já se sabiam resolver com as técnicas do cálculo neste tempo. Encontrar pontos onde uma determinada função toma um máximo ou um mínimo correspondia ao cálculo diferencial que tinha sido desenvolvido no século que acabava. No problema da braquistocrona, no entanto, pretendia-se não encontrar um ponto, senão toda uma curva. Precisavam-se não dumas coordenadas, senão de equações que parametrizassem a curva, e não se tinha

uma função a minimizar, mas sim o que hoje conhecemos por um funcional: um mecanismo que associa um valor numérico a cada curva.

Incógnita	$y \in Y$	$y(x) : \mathbb{R} \rightarrow Y$
Minimizar	$f(y)$	$\mathbb{L}(y) = \int_{x_0}^{x_1} L(x, y, \dot{y}) dx$
Solução	Pontos com $d_y f = 0$?

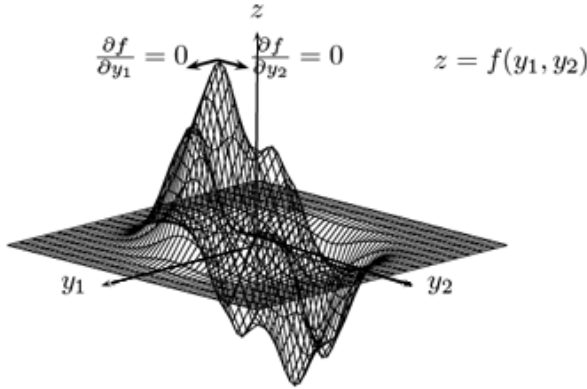


Figura 4: O máximo duma função em várias variáveis $f(y_1, y_2)$ atinge-se em pontos onde $d_y f = (\partial f / \partial y_1, \partial f / \partial y_2)$ se anula.

No primeiro contexto minimizar quer dizer encontrar um ponto y tal que para qualquer outro ponto \bar{y} deve verificar-se $f(y) \leq f(\bar{y})$, enquanto no segundo contexto tratamos de encontrar uma função $y(x)$ (uma curva parametrizada) tal que para qualquer outra $\bar{y}(x)$ se verifique $\mathbb{L}(y) \leq \mathbb{L}(\bar{y})$.

2. Caracterização de rotas óptimas

No número de 1697 da Acta Eruditorum apareceram várias soluções: a original de Johan Bernoulli, a do seu irmão Jakob, uma de l'Hôpital (sem demonstração), Leibniz, Tschirnhaus e uma anónima, que pelo inconfundível estilo (“o leão reconhece-se pelas suas garras”, afirmaria Johan Bernoulli), correspondia a Isaac Newton. De facto, Newton já tinha resolvido anteriormente um problema deste tipo: determinou para um corpo que se move num meio que oferece resistência, qual devia ser a sua forma para que esta resistência

fosse a mínima. Este princípio tinha aplicação no desenvolvimentos de naves e projecteis. Quanto menor a resistência, mais rápida seria a nave ou maior seria o alcance do projectil. Numa carta de 1694 indicava a solução deste problema, sem demonstrações que permitissem deduzir os princípios nos que se baseava. Retrospectivamente, o facto de tais génios matemáticos encontrarem o problema proposto um desafio digno de estudo mostra o excepcional de aquele exercício exposto por Bernoulli, e as implicações que, no futuro, teria sobre o conjunto da matemática e das ciências.

Todas as demonstrações publicadas em 1697 partiam dum princípio ainda hoje central: se a curva tem a propriedade de minimizar um funcional, então também qualquer das suas partes tem essa característica (se pudéssemos melhorar a curva numa das suas partes, então também a totalidade da curva seria melhorada). As técnicas de Johan supunham a braquistocrona decomposta como polígono rectilíneo com um número finito de lados, e que a propriedade minimizante devia dar-se também para qualquer par consecutivo desses lados.

Jakob Bernoulli superou em elegância a demonstração original do seu irmão e de facto decidiu apresentar dois problemas adicionais de natureza similar: encontrar a curva que leva um corpo em queda desde o ponto até uma determinada linha vertical no menor tempo possível, e encontrar a curva que, com um comprimento determinado, contém uma secção de área máxima (o problema isoperimétrico de Dido e Zenodoro). Nenhum destes problemas poderia ser resolvido com as técnicas descritas por Johan. No caso do problema isoperimétrico, encontramos que dois segmentos rectos com comprimento fixado e que unem dois pontos dados formam uma estrutura rígida. Jakob Bernoulli no seu *Analysis magni Problematis Isoperimetrici* mostra como salvar esta questão só com considerar três segmentos consecutivos com um comprimento total determinado. Na linguagem actual, diríamos que enquanto os problemas variacionais clássicos são resolvidos com equações diferenciais de segunda ordem, os problemas de tipo isoperimétrico levam a equações de terceira ordem.

Após estes trabalhos da família Bernoulli, voltamos agora o nosso olhar a um dos grandes génios da história da matemática, Leonhard Euler, nascido em Basileia no ano 1707. Euler fez os seus estudos como aluno de Johan Bernoulli, quem reconheceu o seu potencial e em 1728 propôs a Euler a obtenção das geodésicas numa superfície a partir de propriedades geométricas. Este problema iniciou Euler no cálculo de variações, no que desenvolveu um método geral publicado em 1736. Euler também tratou as curvas elásticas, com energia

(dada pelo integral do quadrado da curvatura) mínima, e melhorou os seus métodos antes de publicar o seu *Methodus inveniendi Lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes* (1744). Euler afirmava nesta obra "...nada do que acontece no universo surge sem aparecer uma lei de máximos e mínimos". Após a publicação deste trabalho a teoria passou de ser pouco mais que uma família curiosa de problemas a ser uma ciência.

Entremos nos detalhes dos argumentos típicos de Euler e dos Bernoulli: Com ajuda das leis de Newton, e já que a energia total do corpo mantém-se constante (cinética mais potencial: $\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + m \cdot g \cdot y$), podemos calcular quanto tempo demora a cair um corpo com energia $e \cdot m$ através do segmento recto entre (a, b) e (a', b') , tempo dado pela expressão

$$t = \frac{\sqrt{1+p^2}}{g \cdot p} \left(\sqrt{2(e-g \cdot Y) + g \cdot p \cdot \Delta x} - \sqrt{2(e-g \cdot Y) - g \cdot p \cdot \Delta x} \right) \quad (T)$$

onde $p = \frac{b'-b}{a'-a}$ é o declive do segmento rectilíneo, g é a constante gravitacional, e a energia da partícula por unidade de massa, $Y = (b+b')/2$ é a altura média do segmento, e Δx é a distância $|a' - a|$.

Podemos pensar a curva que procuramos como uma linha dividida em segmentos rectos que passam por $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$, onde por comodidade tomamos distâncias constantes entre abcissas: $x_k = x_0 + k \cdot \Delta x$ com $\Delta x = (x_n - x_0)/n$. Se usamos a fórmula anterior para calcular o tempo que demora o corpo em cair de (x_{i-1}, y_{i-1}) até (x_i, y_i) através duma trajectória recta obtemos uma expressão

$$t_i = F(Y_i, p_i) = \frac{\sqrt{1+p_i^2}}{g \cdot p_i} \left(\sqrt{2(e-g \cdot Y_i) + g \cdot p_i \cdot \Delta x} - \sqrt{2(e-g \cdot Y_i) - g \cdot p_i \cdot \Delta x} \right)$$

onde $Y_i = (y_i + y_{i-1})/2$ e $p_i = (y_i - y_{i-1})/\Delta x$ são valores dados pelo segmento que estudamos e

$$F(Y, p) = \frac{\sqrt{1+p^2}}{g \cdot p} \left(\sqrt{2(e-g \cdot Y) + g \cdot p \cdot \Delta x} - \sqrt{2(e-g \cdot Y) - g \cdot p \cdot \Delta x} \right)$$

é uma função fixa, que não depende do segmento concreto que estamos a considerar.

Queremos minimizar $s = \sum_i t_i = \sum_i F(Y_i, p_i)$, o tempo total que demora em cair a partícula, que fixando o ponto inicial (x_0, y_0) , o final (x_n, y_n) e o espaço entre dois abcissas consecutivas Δx , pode escrever-se como uma função $S(y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$ que depende da eleição que fizemos dos valores intermédio $(y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$. Para uma função em várias variáveis $S(y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$ se queremos encontrar o mínimo bastará com encontrar onde se anula o gradiente $d_y S$ desta função: $\frac{\partial S}{\partial y_i} = 0$ (para $i = 1, 2, \dots, n - 1$). Na soma S os termos que dependem de y_i são aqueles onde aparece $Y_i = (y_i + y_{i-1})/2$, $Y_{i+1} = (y_{i+1} + y_i)/2$, $p_i = (y_i - y_{i-1})/\Delta x$, $p_{i+1} = (y_{i+1} - y_i)/\Delta x$, que são $F(Y_i, p_i)$ e $F(Y_{i+1}, p_{i+1})$. Se usamos a regra da cadeia a derivada parcial $\partial S/\partial y_i$ pode então escrever-se como:

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial S}{\partial y_i} &= \frac{\partial F}{\partial Y}(Y_i, p_i) \cdot \frac{\partial Y_i}{\partial y_i} + \frac{\partial F}{\partial p}(Y_i, p_i) \cdot \frac{\partial p_i}{\partial y_i} + \\ &+ \frac{\partial F}{\partial Y}(Y_{i+1}, p_{i+1}) \cdot \frac{\partial Y_{i+1}}{\partial y_i} + \frac{\partial F}{\partial p}(Y_{i+1}, p_{i+1}) \cdot \frac{\partial p_{i+1}}{\partial y_i} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F}{\partial Y}(Y_i, p_i) + \frac{\partial F}{\partial Y}(Y_{i+1}, p_{i+1}) \right) - \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{\partial F}{\partial p}(Y_{i+1}, p_{i+1}) - \frac{\partial F}{\partial p}(Y_i, p_i) \right) \end{aligned} \tag{ELd}$$

As equações (ELd) resultantes são $n - 1$ equações (uma por cada valor $i = 1, \dots, n - 1$) para as $n - 1$ incógnitas y_1, \dots, y_{n-1} . Para um número n igual ou superior a 4, resolvê-las é, e era em tempos de Euler, um autêntico desafio, ainda que os actuais métodos numéricos programados em computador permitem encontrar soluções com um erro controlável, circunstância esta que não estava disponível para os contemporâneos de Euler. Há que relembrar, no entanto, que este sim realizou diversos contributos originais na área dos métodos numéricos. Neste problema concreto tomando a aproximação linear em $\Delta x = 0$, Euler deu-se conta de que as expressões são da forma

$$F(Y, p) = \sqrt{\frac{1 + p^2}{2(c - gY)}} \Delta x + G(Y, p, \Delta x) = L(Y, p) \cdot \Delta x + G(Y, p, \Delta x)$$

com $\frac{G(Y, p, \Delta x)}{\Delta x} = 0$ e portanto as equações (ELd) podem escrever-se como:

$$\begin{aligned} 0 = \frac{1}{2}(\Delta x) \cdot (L_Y(Y_{i+1}, p_{i+1}) + L_Y(Y_i, p_i)) - (L_p(Y_{i+1}, p_{i+1}) - L_p(Y_i, p_i)) + \\ + \frac{1}{2}(G_Y(Y_{i+1}, p_{i+1}, \Delta x) + G_Y(Y_i, p_i, \Delta x)) - \\ - \frac{1}{\Delta x}(G_p(Y_{i+1}, p_{i+1}, \Delta x) - G_p(Y_i, p_i, \Delta x)) \end{aligned}$$

onde $L(Y, p) = \sqrt{\frac{1+p^2}{2(e-gY)}}$ é a função que hoje recebe o nome de Lagrangiano do problema, e $L_Y = \partial L/\partial Y$, $L_p = \partial L/\partial p$, $G_Y = \partial G/\partial Y$, $G_p = \partial G/\partial p$. De facto, a função F considerada pelos Bernoulli e Euler era simplesmente a componente linear $L(Y, p)\Delta x$ da função F .

Se dividimos por Δx e tomamos limites, os termos G em desaparecem e temos as equações que caracterizam a braquistocrona $(x, y(x))$:

$$L_Y(Y(x), p(x)) - \frac{d}{dx}(L_p(Y(x), p(x))) = 0, \quad Y(x) = y(x), \quad p(x) = \frac{d}{dx}y(x) \tag{EL}$$

Com uma mudança da orientação, origem e unidades do eixo yy de forma que $2(e - g Y)$ possa escrever-se como Y , e que a constante gravitacional satisfaça $2g=1$, o Lagrangiano toma a forma $L(Y, p) = \sqrt{\frac{1+p^2}{Y}}$, e a expressão (EL) leva à equação $2y\ddot{y} + \dot{y}^2 + 1 = 0$, cuja solução era conhecida pelos matemáticos da época: a curva cicloide, cuja forma paramétrica é: $x(t) = x_0 + \frac{c}{2}(t - \sin t)$, $y(t) = y_0 + \frac{c}{2}(1 - \cos t)$.

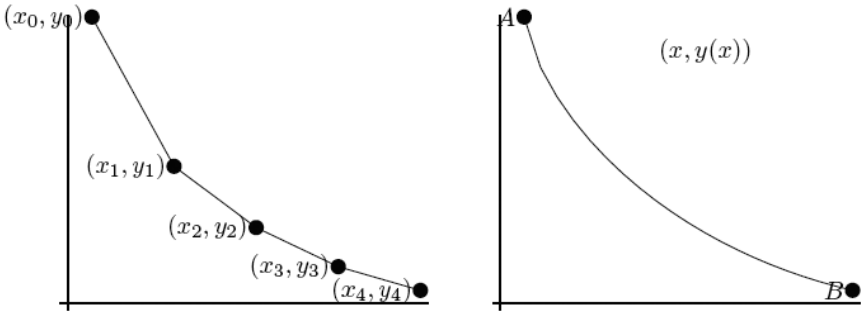


Figura 5: Solução do problema da braquistocrona: À esquerda, para uma curva formada por $n = 4$ segmentos rectilíneos, solução de (ELd); à direita, na situação limite $n \rightarrow \infty$, mostra-se a curva solução da equação diferencial (EL).

Portanto o último passo de Euler e dos irmãos Bernoulli foi afastarem-se do (difícilimo) problema algébrico de resolver sistemas de equações com múltiplas incógnitas, para passar a formulá-lo como um problema de resolução de equações diferenciais.

O matemático francês Lagrange descartou os argumentos geométricos de Euler e dos Bernoulli (pouco apropriados para a sua generalização dum problema a outro) por métodos mais analíticos. Obteve assim procedimentos gerais, eliminando qualquer utilização da teoria de máximos e mínimos para um

número finito de incógnitas. Mais concretamente, se consideramos o problema de, entre todas as curvas diferenciáveis $y: x \in [x_0, x_1] \mapsto y(x) \in \mathbb{R}^n$ com extremos pré-fixados $y(x_0) = y_i$, $y(x_1) = y_f$, encontrar aquela que minimiza $\mathbb{L}(y) = \int_{x_0}^{x_1} L(x, y, \dot{y}) dx$, podemos pensar numa "variação" da curva (ver figura), que depende dum parâmetro, definida como uma família de curvas $\sigma_t(x)$ onde $\sigma_0 = y$. Para esta variação, usando integração por partes (uma das duas ferramentas centrais do cálculo de variações) prova-se que a derivada do funcional \mathbb{L} toma a forma:

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \mathbb{L}(\sigma_t) = \int_{x_0}^{x_1} (L_y - \frac{d}{dx} L_{\dot{y}}) \cdot \delta y dx + [L_{\dot{y}} \cdot \delta y]_{x_0}^{x_1}$$

sendo $\delta y = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \sigma_t$, campo de vectores definido nos pontos de $y(x)$.

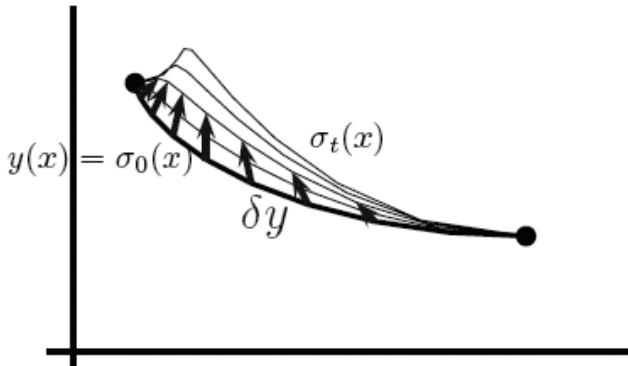


Figura 6: O método das variações: Para cada curva $y(x)$ e cada variação $\sigma_t(x)$ sua, existe um campo de vectores associado δy . Este campo determina como se comporta o funcional \mathbb{L} em $t = 0$.

A segunda componente $[L_{\dot{y}} \cdot \delta y]_{x_0}^{x_1}$ (que só depende dos valores de y , \dot{y} , δy , na fronteira x_0, x_1) anula-se se consideramos variações onde cada σ_t tem (x_0, y_i) , (x_1, y_f) como extremos, já que para estas o campo δy é 0 nesses pontos.

Por outra parte, podemos usar a segunda ferramenta básica do cálculo de variações (Lema fundamental do cálculo de variações):

Lema: Se $E(x)$ é diferenciável e $\int_{x_0}^{x_1} E(x) \cdot \delta y dx$ é nulo para qualquer eleição de δy diferenciável e que se anule nos extremos, então $E(x)$ anula-se em todos os pontos.

Com estes dois passos, prova-se que a curva mínima que procuramos, se existir, deve verificar as chamadas equações de Euler-Lagrange (EL):

$$L_y(x, y(x), \dot{y}(x)) - \frac{d}{dx} (L_{\dot{y}}(x, y(x), \dot{y}(x))) = 0$$

Euler encontrou o método geral de resolução, mas Lagrange deu-lhe forma definitiva com as equações que são conhecidas como de Euler-Lagrange, com argumentos que lhe permitiram, numa carta a Euler, sugerir o nome de "cálculo de variações" que mantém a teoria até aos nossos dias. Em *Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules intégrales indéfinies* (1760) temos já a equação para problemas em mais duma variável independente (as incógnitas são funções $y(x_1, \dots, x_n)$ e os funcionais exigem realizar integrais duplos, triplos ou múltiplos). O desenvolvimento da teoria levou ao nascimento da Análise funcional e mantém desde sempre fortes ligações com ramos da ciência como a geometria, além de ser uma ferramenta central na maior partes das teorias físicas fundamentais.

3. Aplicação à trajetória de veículos

Pensemos num avião ou num barco que precisam transitar entre dois pontos em presença dum radar. Se usarmos um sistema de coordenadas polares centrado no radar, a posição do nosso veículo em cada instante ficará determinada pela distância $R \in [0, \infty]$ ao radar e a direcção $\varphi \in [0, 2\pi]$ com respeito ao mesmo. Se o veículo se encontra parado nesta posição durante um intervalo de tempo $\Delta t > 0$, podemos calcular a probabilidade $\mathbb{P}(R, \varphi, \Delta t) \in [0, 1]$ de não ser detectado nesse intervalo de tempo nessa posição. As leis do cálculo de probabilidades indicam que a probabilidade de que aconteçam dois sucessos independentes é o produto das probabilidades de cada um dos sucessos. O facto de não sermos detectados num intervalo de tempo $\Delta_1 t + \Delta_2 t$ dá-se quando não somos detectados num primeiro intervalo (de comprimento $\Delta_1 t$) e não somos detectados num segundo intervalo (de comprimento $\Delta_2 t$), sucessos que são independentes um do outro. A probabilidade de não ser detectado na posição (R, φ) verifica então:

$$\mathbb{P}(R, \varphi, \Delta_1 t + \Delta_2 t) = \mathbb{P}(R, \varphi, \Delta_1 t) \cdot \mathbb{P}(R, \varphi, \Delta_2 t)$$

A função logaritmo tem a propriedade de transformar um produto numa soma: $\log(a \cdot b) = \log a + \log b$. Se tomamos o logaritmo na equação anterior isto é, se definimos $P(R, \varphi, \Delta t) = \log(\mathbb{P}(R, \varphi, \Delta t))$ deduzimos a seguinte propriedade da função $P = \log(\mathbb{P})$:

$$P(R, \varphi, \Delta_1 t + \Delta_2 t) = P(R, \varphi, \Delta_1 t) + P(R, \varphi, \Delta_2 t), \quad P = \log(\mathbb{P}) \quad (\text{AD})$$

Com esta igualdade chegamos á conclusão que a função P é uma função linear em $\Delta t > 0$, e que produz valores reais negativos $P \in]-\infty, 0[$.

Ainda mais, as probabilidades de que estamos a falar dependem da posição do nosso veículo, mas na realidade só dependem da energia total e que chega do radar ao veículo e novamente de volta até ao radar. Esta energia $e \geq 0$ em cada direcção φ é proporcional a $1/R^4$, com constante de proporcionalidade que dependerá em que direcções emite maior energia o radar (como está orientado o radar), assim que a energia que o nosso veículo devolve ao radar numa posição (R, φ) por unidade de tempo está dada por $e = a(\varphi)/R^4$, onde $a(\varphi) \geq 0$ é uma função que depende de factores como o tipo de radar e a sua orientação. Por tanto, a função P deve ser $P(R, \varphi) = L(a(\varphi)/R^4) \cdot \Delta t$. A função $L(e)$ que determina se somos ou não descobertos para certos níveis de energias reflectidas depende da natureza do radar, do nosso veículo, e da perícia do pessoal encarregado de operar o radar.

Para valores de R grandes a probabilidade de não sermos detectados vai ser $\mathbb{P} = 1$, portanto o logaritmo será $P(R, \varphi, \Delta t) = 0$ para $R \rightarrow \infty$ (ou $1/R^4 = 0$), e segundo R decresce, a probabilidade de não sermos detectados diminui até chegar a $\mathbb{P} = 0$ quando $R = 0$, e o seu logaritmo será $P(R, \varphi, \Delta t) = -\infty$ para $1/R^4 = \infty$. A função $L(a(\varphi)/R^4)$ que consideramos deve então verificar $L(0) = 0, L(\infty) = -\infty, L'(e) \leq 0$. Concluimos que a probabilidade de não ser descobertos na posição (R, φ) durante um período Δt está dada por

$$\mathbb{P}(R, \varphi, \Delta t) = \exp(L(a(\varphi)/R^4) \cdot \Delta t), \quad \left\{ \begin{array}{l} L \in [-\infty, 0] \\ L'(e) \leq 0 \\ L(0) = 0 \\ L(\infty) = -\infty \end{array} \right\}$$

Quando o nosso veículo não fica numa posição fixa, podemos dividir o intervalo $[t_0, t_1]$ em intervalos pequenos de comprimento dt e interpretar que dentro de cada um desses “instantes” o veículo mantém uma posição fixa. Se usamos a propriedade (AD) de $P = \log \mathbb{P}$, obtemos no cálculo da probabilidade que o seu

logaritmo é uma soma de valores P da forma $L(a(\varphi(t))/R^4(t)) \cdot dt$. No limite $dt \rightarrow 0$ esta soma é um integral. Deduzimos assim que quando o veículo está em movimento a seguir a trajectória $(R(t), \varphi(t))$ durante um tempo $t \in [t_0, t_1]$, a probabilidade de não ser descoberto será:

$$\mathbb{P}(R(t), \varphi(t)) = \exp\left(\int_{t_0}^{t_1} L\left(\frac{a(\varphi(t))}{R^4(t)}\right) dt\right)$$

Queremos maximizar esta probabilidade, ou o que é o mesmo, encontrar a trajectória $(R(t), \varphi(t))$ ao longo da qual $\int_{t_0}^{t_1} L\left(\frac{a(\varphi(t))}{R^4(t)}\right) dt$ for máximo. A solução dependerá da orientação e natureza do radar e da sensibilidade dos aparelhos e pessoal de detecção (caracterizados com as funções $a(\varphi)$ e $L(e)$).

A função $a(\varphi)$ será um valor $a > 0$ constante se o radar aponta por igual em todas as direcções. Entre as possíveis funções $L(e)$, a mais simples que verifica as condições (ainda que não necessariamente proporciona o modelo mais realista) será $L(e) = -e$.

Mais ainda, num problema com mais radares, devido à natureza (AD) da função $P = \log \mathbb{P}$ para o sucesso composto "não sermos detectados pelo radar 1, nem pelo radar 2,... nem pelo radar k", a probabilidade de não sermos detectados por nenhum deles poderá também exprimir-se como

$$\mathbb{P}(R(t), \varphi(t)) = \exp\left(\int_{t_0}^{t_1} L_1\left(\frac{a_1(\varphi_1(t))}{R_1^4(t)}\right) + \dots + L_k\left(\frac{a_k(\varphi_k(t))}{R_k^4(t)}\right) dt\right)$$

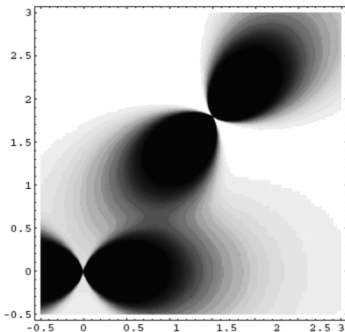


Figura 7: O gráfico mostra com tons de cinzento $\mathbb{P}(R, \varphi)$, que representa a probabilidade de não sermos detectados num período de tempo Δt pelos radares situados na origem $(0,0)$ e no ponto $(1.5, 1.8)$, com características determinadas respectivamente pela função $a_1(\varphi_1) = \cos^{10} \varphi_1$ e $a_2(\varphi_2) = \cos^{10}(\varphi_2 - 45)$. Estas funções têm valores máximos nas direcções $\varphi_1 = 0^\circ, 180^\circ$ e $\varphi_2 = 45^\circ, 225^\circ$, direcções de orientação destes radares.

onde (R_i, φ_i) representa a posição do veículo com respeito ao radar i , e as funções $a_i(\varphi_i), L_i$, são características de cada radar, da sua orientação, e do pessoal que trabalha nele.

Agora, se consideramos que o nosso veículo se desloca ao longo da curva $(R(\varphi), \varphi)$ a uma velocidade constante, $ds/dt = v$ entre os pontos (R_0, φ_0) e (R_1, φ_1) num tempo $[t_0, t_1]$, usando a fórmula que caracteriza o elemento de arco em coordenadas polares $ds = \sqrt{(\partial R/\partial \varphi)^2 + R^2} d\varphi$, o integral $\int_{t_0}^{t_1} L\left(\frac{v}{R(\varphi)}\right) dt$ pode escrever-se em termos da trajectória como

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{1}{v} L(v/R(\varphi)) \sqrt{(\partial R/\partial \varphi)^2 + R^2} d\varphi$$

Um resultado notável desta fórmula é que, se a nossa unidade se move ao dobro de velocidade $v' = 2v$, a probabilidade de não ser detectada passará de ser $\exp(-P) = x$ a ser $\exp(-\frac{1}{2}P) = \sqrt{x}$, e a de sim ser detectada passará de $\alpha = 1 - x$ a $\beta = 1 - \sqrt{x} = 1 - \sqrt{1 - \alpha}$. Podemos avaliar quantitativamente a vantagem de incrementar ou não a velocidade. No gráfico adjunto vemos como a probabilidade de ser detectados, quando dobramos a velocidade, não é a metade da probabilidade original. Esta ideia intuitiva é certa só de forma aproximada para probabilidades pequenas, mas não para probabilidades grandes. Outro resultado que podemos concluir é que se multiplicamos a velocidade por λ , a probabilidade de não sermos detectados passa a ser a que tivéssemos anteriormente elevada à potência $1/\lambda$. Dado que para λ positivo a função $x^{1/\lambda}$ é monótona crescente, a trajectória óptima que encontrarmos para uma determinada velocidade também vai servir como trajectória óptima para qualquer outra velocidade. Isto sim corresponde com a ideia intuitiva de que a trajectória óptima que deve seguir a unidade não depende da velocidade que a mesma seja capaz de atingir.

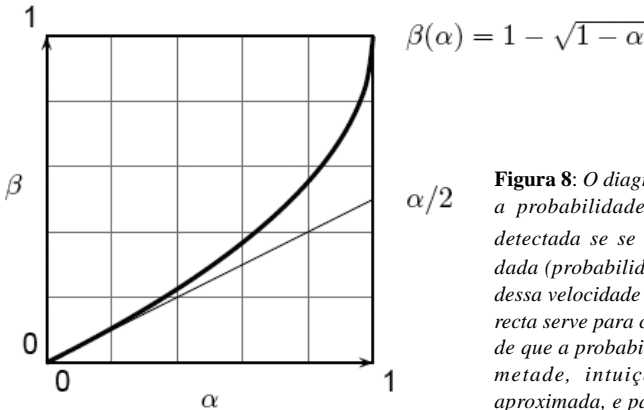


Figura 8: O diagrama mostra como se modifica a probabilidade de que uma unidade seja detectada se se desloca a uma velocidade v dada (probabilidade α) e se desloca ao dobro dessa velocidade (probabilidade $\beta(\alpha)$). A linha recta serve para comparar com a ideia intuitiva de que a probabilidade deveria dividir-se pela metade, intuição correcta só de forma aproximada, e para probabilidades pequenas.

Estamos já em situação de determinar as trajectórias óptimas. Por exemplo, no caso mais simples $a(\varphi) = a$, $L(e) = -e$, se queremos maximizar a probabilidade de não sermos detectados $\mathbb{P} = \exp\left(-\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{a}{R^4} \sqrt{(\partial R/\partial \varphi)^2 + R^2} d\varphi\right)$, conseguiu-lo-emos quando minimizemos $\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} (1/R^4) \sqrt{(\partial R/\partial \varphi)^2 + R^2} d\varphi$. Podemos caracterizar estas trajectórias pelo sistema de equações diferenciais (EL) de Euler-Lagrange associadas a este funcional $L(R, R_\varphi) = (1/R^4) \sqrt{(R_\varphi)^2 + R^2}$, onde $R(\varphi)$ joga o papel de função incógnita e φ de variável independente:

$$0 = L_R(R(\varphi), R_\varphi(\varphi)) - \frac{d}{d\varphi} (L_{R_\varphi}(R(\varphi), R_\varphi(\varphi))) \Rightarrow$$

$$0 = \frac{-3R^2(\varphi) - 2R_\varphi^2(\varphi) - R(\varphi)R_{\varphi\varphi}}{R^3(\varphi)(R^2(\varphi) + R_\varphi^2(\varphi))^{3/2}}$$

A solução desta equação diferencial é simples. Basta introduzir $S(\varphi) = R^3(\varphi)$ e observar que a equação é equivalente a $\partial^2 S/\partial \varphi^2 + 9S = 0$. A solução desta equação é $S(\varphi) = \lambda \cos(3\varphi) + \mu \sin(3\varphi)$ para certas constantes $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. As trajectórias óptimas seguem as curvas de equações:

$$R(\varphi) = \sqrt[3]{\lambda \cos(3\varphi) + \mu \sin(3\varphi)}$$

onde λ, μ são valores que se podem calcular a partir do par de pontos inicial (R_0, φ_0) e final (R_1, φ_1) do nosso percurso:

$$\left. \begin{aligned} R_0^3 &= \lambda \cos(3\varphi_0) + \mu \sin(3\varphi_0) \\ R_1^3 &= \lambda \cos(3\varphi_1) + \mu \sin(3\varphi_1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \lambda &= \frac{R_0^3 \sin(3\varphi_1) - R_1^3 \sin(3\varphi_0)}{\sin(3(\varphi_1 - \varphi_0))} \\ \mu &= \frac{R_1^3 \cos(3\varphi_0) - R_0^3 \cos(3\varphi_1)}{\sin(3(\varphi_1 - \varphi_0))} \end{aligned} \right\}$$

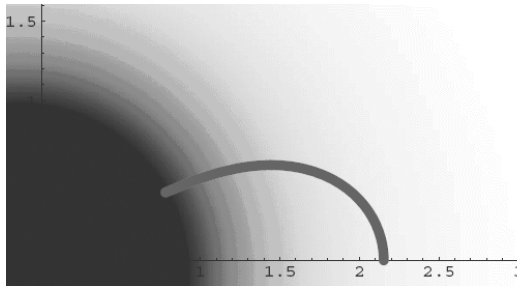


Figura 9: O gráfico mostra com tons de cinzento a função $\mathbb{P}(R, \varphi) = \exp((-a/R^4) \cdot \Delta t)$, que representa a probabilidade de não sermos detectados num período de tempo Δt pelo radar situado na origem de coordenadas, com funções características $L(e) = -e$, $a(\varphi) = a$. Mostra-se uma trajectória óptima entre dois pontos.

A trajectória óptima que passa pelos pontos de coordenadas (R_0, φ_0) e (R_1, φ_1) está dada pelas equações:

$$R^3(\varphi) = \frac{R_1^3 \sin(3(\varphi - \varphi_0)) - R_0^3 \sin(3(\varphi - \varphi_1))}{\sin(3(\varphi_1 - \varphi_0))}$$

Dito de outra forma, um trio de pontos (R_0, φ_0) , (R_1, φ_1) , (R_2, φ_2) , pertencem a uma mesma trajectória óptima se e só se:

$$R_2^3 \sin(3\varphi_1 - 3\varphi_0) + R_1^3 \sin(3\varphi_0 - 3\varphi_2) + R_0^3 \sin(3\varphi_2 - 3\varphi_1) = 0$$

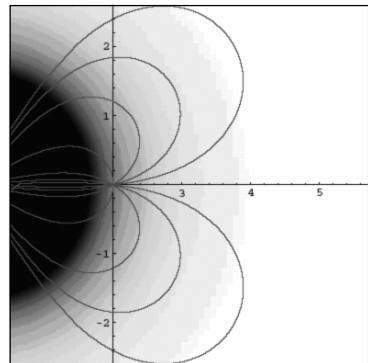
Isto é um análogo (dentro da geometria gerada pelo nosso problema) à condição conhecida em geometria Euclidiana que determina quando três pontos são colineares (estão na mesma recta):

$$\left. \begin{matrix} (x_0, y_0) \\ (x_1, y_1) \\ (x_2, y_2) \end{matrix} \right\} \text{ na mesma recta} \Leftrightarrow x_2(y_1 - y_0) + x_1(y_0 - y_2) + x_0(y_2 - y_1) = 0$$

A analogia indicada não é casualidade, e a geometria que aparece agora, se substituirmos a ideia de linhas de mínima distância em geometria euclidiana por linhas de mínima probabilidade de sermos vistos, onde a noção de distância é substituída por essa probabilidade, proporciona um bonito exemplo de geometria não euclidiana, onde a distância verifica as condições habituais que se exigem a uma distância:

$$\begin{aligned} d(A, B) &= \min_{(R(\varphi), \varphi)} \mathbb{P}_A^B(R(\varphi), \varphi) \\ d(A, B) &\geq 0, \quad d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B \\ d(A, B) &= d(B, A) \\ d(A, C) &\leq d(A, B) + d(B, C) \end{aligned}$$

Figura 10: O gráfico mostra as diferentes trajectórias óptimas com origem no ponto $(2,0)$, em presença dum radar situado em $(0,0)$. Para o nosso veículo as linhas marcadas jogam o papel de linhas rectas, e as probabilidades de sermos detectados o papel de distância, obtendo-se assim um exemplo de geometria não Euclidiana.



e onde certos postulados euclidianos como o das paralelas não se verificam (dada uma trajectória óptima e um ponto exterior, pode haver muitas trajectórias óptimas que passam pelo ponto sem cortar a trajectória original, ao contrário da geometria euclidiana). O estudo desta geometria tem uma utilidade que parece clara neste contexto, assim como em contextos similares de análise de riscos em economia, por exemplo.

Poderiam ainda considerar-se outros aspectos interessantes, por exemplo, se a velocidade do veículo não é constante mas sim podemos controlá-la à vontade dentro duns valores que poderiam até depender das características do terreno, se a função $L(e)$, é mais complexa e depende também do parâmetro tempo (hora do dia em que estamos a transitar), surge a questão de qual poderia ser a velocidade e trajectória óptima em cada instante $v(t)$, $R(t)$, $\varphi(t)$ para que a probabilidade de ser visto seja mínima.

Entraríamos aqui numa área do cálculo de variações que está em plena expansão na matemática moderna, a teoria de controlo, onde a nossa variável de controlo está representada pela direcção e velocidade que seguimos em cada instante, e que pretendemos ajustar para não sermos detectados. O desenvolvimento desta questão supõe, no entanto, sair do carácter introdutório deste trabalho.

Há muitos detalhes técnicos no cálculo de variações de difícil compreensão para os não matemáticos. Este tipo de detalhes levam frequentemente à ideia de que as teorias matemáticas estão afastadas dos problemas urgentes de cada dia, e que portanto são inúteis. No problema aqui estudado pretendemos mostrar, com técnicas matemáticas de cálculo, como as ideias gerais do cálculo de variações levam a resultados de interesse numa área concreta (neste caso, ligada ao cálculo de riscos), e como um estudo em maior profundidade pode conduzir a resultados de importância real e palpável. Esta é a intenção final dum trabalho que só pretende servir como convite ao estudo deste ramo da matemática e das ciências em geral.

Referências:

- DÍAZ, I (1998). *De la pompa de jabón al satélite artificial: Lo óptimo como estrategia*. Em: Horizontes culturales, las fronteras de la ciencia. Real academia de ciencias exactas, físicas y naturales. Ed. Espasa.
- JOST, V. e ELI-VOST, X. (1999). *Calculus of Variations*, Cambridge Un. Press.
- KLINE, M. (1972). *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días*. Alianza Ed.
- NOVY, M.C. (2001). Air vehicle optimal trajectories for minimization of radar exposure. Ph.D. Thesis, Air Force Institute of technology. Air University
- ROBBINS, R. B. (1915). *A method in the Calculus of Variations*. American Journal of Mathematics, Vol. 37, N.º 4, p. 367-394.
- SUSSMANN, H.J. e WILLEMS, J.C. (2006). *The Brachistochrone Problem and modern control theory*, in *Vários Mathematical Control Theory*, Eds. Springer Verlag, p. 140-198.
- TODHUNTER, I. (1861). *A history of the progress of the calculus of variations*, McMillan and Co..