A PERSPECTIVA - DO RENASCIMENTO À SOCIEDADE DA INFORMAÇÃO

PARTE III

Carlos Tavares Ribeiro (*)
Professor Associado

Resumo

Nos artigos I e II anteriores foi mencionado o conceito de modelo geométrico e foi formulado o procedimento matemático subjacente á sua constituição foram estabelecidos os correspondentes algoritmos para representação computacional de formas geométricas em 2D (polígonos) e ainda a aplicação de procedimentos de transformação – variação de escala, rotação, reflexão e translação – sobre os polígonos iniciais seguidas da respectiva representação, depois de efectuadas as desejadas transformações.

No presente artigo, procede-se à descrição do processo de generalização destes procedimentos – representação e transformações geométricas seguida de representação das formas depois de transformadas – para formas ou objectos em 3D. Ver-se-á, pois, como inicialmente enunciado, quanto a formulação matemática e o estabelecimento dos correspondentes algoritmos, resultam tão simplesmente da relação – observador-objecto-plano de projecção – subjacente desde sempre à obtenção da perspectiva: a mesma análise que desde o período do Renascimento conduziu ao conceito e formulação da perspectiva e possibilitou a sua representação, e que se mantém face à sucessiva nova instrumentação que o desenvolvimento civilizacional foi possibilitando até à actual Sociedade da Informação.

(*) Docente na Academia Militar, nos cursos de Engenharia Civil e de Engenharia Mecânica e por protocolo na Universidade Aberta. Membro efectivo do Centro de Investigação da Academia Militar (CINAMIL).

1. REPRESENTAÇÃO EM 2D DE FORMAS EXISTENTES EM 3D

A representação – em 2D – de formas existentes em 3D, bem como os procedimentos para transformações geométricas do tipo descrito para objectos ou formas em 2D, pode ser estabelecida por generalização dos procedimentos descritos para a representação em 2D de formas igualmente existentes (ou em fase de concepção) em 2D.

Assim, a constituição do modelo geométrico, para qualquer objecto, deve basear-se numa representação da matriz de coordenadas com três colunas (quatro se em coordenadas homogéneas), à semelhança da consideração de duas colunas (três se em coordenadas homogéneas) para figuras em 2D, por inclusão da coordenada segundo o eixo Z orientado segundo a perpendicular ao plano de projecção.

A matriz de topologia será obviamente do mesmo tipo e já descrita no artigo anterior.

As matrizes de transformação deverão ser, pois, de dimensão 4 x 4 no sentido de contemplar transformações referentes a três coordenadas (dimensão n x 4, para compatibilização dos produtos matriciais por consideração da translação na matriz de transformação).

Ter-se-ão portanto de uma forma geral, as matrizes de coordenadas, de topologia e de transformação, respectivamente, do tipo:

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_1 & 1 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ x_n & y_n & z_n & 1 \end{bmatrix} ; \quad \underline{TOP} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ \bullet & \bullet \\ n-1 & n \\ n & 1 \end{bmatrix} ; \quad \underline{T} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & t_{34} \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} & t_{44} \end{bmatrix}$$

Repare-se desde já que, quer em termos de representação da forma dada a partir da matriz de coordenadas inicial, quer em termos da representação a partir da nova matriz de coordenadas transformadas por aplicação de transformações geométricas elementares ou não, o algoritmo respectivo deverá ser diferente do descrito para formas em 2D e transformações geométricas também em 2D.

Com efeito, apesar de se passar a considerar formas ou objectos em 3D com a qual se identifique uma matriz envolvendo três coordenadas, a representação

é *sempre* uma forma em 2D (duas coordenadas), pelo que deverá ser necessária a inclusão de procedimentos correspondentes á obtenção de projecções planas do objecto, isto é, Projecções Geométricas Planas nos termos apresentados de acordo com cada relação observador-objecto-plano de projecção, pretendida, resultando em termos absolutos uma figura (imagem) em 2D, isto é, definida, não por três, mas por duas coordenadas. É a percepção do leitor, que identifica, a partir desta representação em 2D, a sua configuração em 3D.
Na situação mais elementar - observador a uma distância infinita do plano de projecção nos termos do próprio conceito de projecção ortogonal, trata-se de obter uma representação no plano, da forma ou objecto existente em 3D, isto é, todos os vértices mantêm as coordenadas segundo xx e yy e passa a ser nula a coordenada segundo zz (Fig. 1).

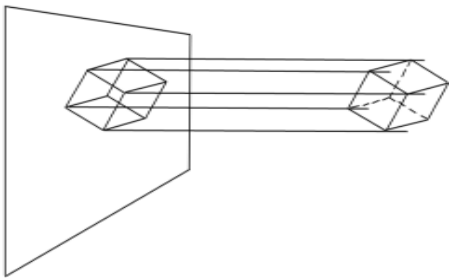


Fig. 1 - *Projecção Ortogonal de uma peça em 3D: transformação 3D → 2D.*

Para este caso trata-se afinal, e considerando a matriz de coordenadas correspondentes à representação pretendida, de estabelecer uma transformação a partir da qual, na matriz de coordenadas se obtêm os mesmos valores nas primeiras duas colunas (coordenadas segundo xx e yy) e nulos os valores da terceira coluna (coordenada segundo zz), isto é:

$$\underline{C} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 0 & 1 \\ x_2 & y_2 & 0 & 1 \\ \bullet & \bullet & 0 & 1 \\ \bullet & \bullet & 0 & 1 \\ x_n & y_n & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

De facto a representação (para o caso 3D → 2D) só por si, implica a consideração de uma transformação geométrica — a projecção ortogonal; obviamente não considerada na situação apresentada nos casos do artigo anterior por, nesses casos, ser em 2D a figura a representar, pelo que se terá.

$$\underline{\mathbf{C}} \quad \mathbf{x} \quad \underline{\mathbf{T}}_{\mathbf{PO}} \quad = \quad \underline{\mathbf{C'}}$$

devendo ser:

$$\underline{T} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

isto é, a matriz identidade com a terceira coluna nula donde, pelo produto matricial, a terceira coluna da matriz de coordenadas anula-se.

Assim, para o caso da representação em 2D de formas geométricas existentes em 3D, o algoritmo de representação apresentado no artigo anterior para figuras em 2D, deve ainda incluir um produto por mais uma transformação geométrica adicional — a transformação geométrica correspondente à projecção ortogonal (e somente esta se não houve outras transformações geométricas).

Tudo se passa como se a matriz de transformação genérica, tendo em conta a representação no plano, se apresentasse na forma:

$$\underline{T} = \begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} & 0 & t_{14} \\ t_{21} & t_{22} & 0 & t_{24} \\ t_{31} & t_{32} & 0 & t_{34} \\ t_{41} & t_{42} & 0 & t_{44} \end{vmatrix}$$

2. TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS DE FORMAS EXISTENTES EM 3D

As matrizes de transformação para efeitos de manipulação de formas em 3D correspondem, como se referiu acima, a uma generalização das matrizes de transformação em 2D apresentadas no artigo anterior. Todas as considerações

aí estabelecidas, nomeadamente, a dimensão das matrizes de transformação, a consideração de coordenadas homogéneas na matriz de coordenadas e a possibilidade de combinação de transformações por multiplicação das respectivas matrizes, mantêm-se válidas.
As transformações geométricas, em geral, resultam de transformações elementares para as quais se estabelecem previamente as respectivas matrizes.
Tem interesse para o estabelecimento das transformações elementares, a consideração de uma subdivisão da matriz genérica em sub-matrizes (de dimensões diferentes) como se apresenta:

$$\underline{T} = \left| \begin{array}{c|c} (3 \times 3) & (3 \times 1) \\ \hline (1 \times 3) & (1 \times 1) \end{array} \right|$$

Com efeito a cada uma destas sub-matrizes cabe a obtenção de diferentes tipos de transformações geométricas:

a) de manipulação
   - SubMatriz (3 x 3)
     Transformações geométricas em 3D referentes a manipulação de formas e do tipo apresentado para o caso de transformações em 2D. É nesta submatriz que se incluem as transformações geométricas elementares e a obtenção das Projecções do Tipo Paralela ou Cilíndrica.
   - Submatriz (1 x 3)
     Translações, para formas existentes em 3D;
   - Submatriz (1 x 1)
     Transformação correspondente a uma variação de escala global de um mesmo valor segundo as três direcções.

b) de geração das diversas Projecções Geométricas Planas segundo cada perspectiva considerada
   - Submatriz (3 x 1)
     As transformações resultantes dos valores das posições desta submatriz correspondem, não propriamente à manipulação das formas em 3D nos termos habitualmente descritos, mas sim a cada projecção geométrica plana correspondente aos diferentes tipos de Projecção Central ou Cónica para uma dada relação observador-objecto-plano de projecção.

2.1. *Transformações Geométricas em 3D, elementares*

2.1.1. *Induzidas pela sub-matriz 3 x 3*

As transformações geométricas elementares determinadas pela sub-matriz (3 x 3) da matriz de transformação genérica, são as seguintes:

— Variação de Escala

Permite ampliar ou reduzir as dimensões da figura geométrica, sendo t_{11}, t_{22} e t_{33} os coeficientes de variação de escala respectivamente segundo os eixos xx, yy e zz do referencial associado ao plano de projecção, podendo ser ou não iguais entre si conforme se pretenda ou não deformação da peça em questão;

$$\underline{T} = \begin{vmatrix} t_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

— Reflexão

A reflexão, pode ser segundo os eixos xx, yy e neste caso também segundo um eixo ou segundo os três eixos, isto é, segundo a origem. Para cada um dos casos ter-se-á respectivamente:

$$T_{Ref.xx} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad T_{Ref.yy} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

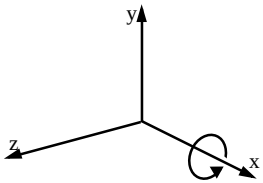
$$T_{Ref.zz} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad T_{Ref.00} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Na situação de transformações em 3D a reflexão pode também ser estabelecida segundo os planos do referencial, cuja dedução se deixa ao cuidado do leitor;

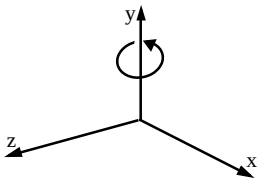
— Rotação

A rotação pode em 3D contemplar três situações diferentes, isto é, em torno dos eixos xx, yy ou zz. Para cada um dos casos, as matrizes de rotação elementares serão as seguintes:

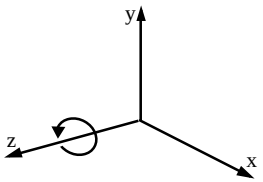
$$T_{Rot.xx} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$, isto é:



$$T_{Rot.yy} = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$, isto é:



$$T_{Rot.zz} = \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\gamma & 0 & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$, isto é:



De notar a maior afinidade da matriz de rotação em torno de Z com a matriz de rotação para objectos em 2D, apresentada no artigo anterior.
De facto a rotação em torno do eixo dos Z passa-se como que no plano XY (ou num plano paralelo) e portanto em torno da origem de um referencial bidimensional constituído pelos eixos X e Y.
Nos restantes casos a situação é semelhante para referenciais bidimensionais identificados com os eixos Z e Y (rotação em torno de X) e com os eixos Z (rotação em torno de Y).

2.1.2. *Induzidas pela sub-matriz 1 x 3*

À sub-matriz (1 x 3) correspondem as translações, isto é, a adição de valores t_{41} a t_{43}, simultaneamente ou não, às coordenadas respectivamente segundo x, y ou z do objecto. A matriz de transformação é portanto da forma:

$$\underline{T} = \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline t_{41} & t_{42} & t_{43} & 1 \end{array}\right|$$

Obviamente a valores t_{4j} com j = 1, 2 ou 3, nulos, não se efectua translação do objecto segundo a respectiva direcção.

2.1.3. *Induzidas pela sub-matriz 1 x 1*

Surge neste caso a necessidade de fazer notar que o restabelecimento de coordenadas cartesianas, a partir de um tratamento em coordenadas homogéneas implica a obrigatoriedade de divisão dos elementos de cada linha da matriz de coordenadas transformadas, pelo coeficiente que figura na última posição (coluna) da respectiva linha, obviamente quando o valor da última coluna em alguma linha da matriz é não unitário.

Tal situação ocorre na transformação geométrica induzida pela sub-matriz 1 x 1 a que corresponde uma variação de escala global, isto é, um aumento ou redução das dimensões do objecto segundo as três direcções x, y e de um mesmo valor (sem qualquer deformação).

A matriz de transformação assume neste caso a forma:

$$\underline{T} = \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & t_{44} \end{array}\right|$$

Tendo em conta as considerações referidas (divisão pela última coluna para obtenção de coordenadas cartesianas), verifica-se que:

— se $t_{44} > 1$: Redução de $1/\ t_{44}$

— se $t_{44} < 1$: Ampliação de $1/\ t_{44}$

Daí ser usual apresentar o coeficiente t_{44} sob a forma $1/V_e$ sendo V_e o coeficiente de variação de escala global, pelo que em termos práticos estabelece-se de um modo mais intuitivo,

$$V_e > 1 : \quad \text{ampliação}$$
$$V_e < 1 : \quad \text{redução}$$

Assim, e de acordo com os procedimentos descritos, ter-se-ia:

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ : & : & : & : \\ x_n & y_n & z_n & 1 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{v_e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & \frac{1}{v_e} \\ x_2 & y_2 & z_2 & \frac{1}{v_e} \\ : & : & : & : \\ x_n & y_n & z_n & \frac{1}{v_e} \end{bmatrix}$$

pelo que a matriz de coordenadas transformadas viria finalmente:

$$C' = \begin{bmatrix} v_e x_1 & v_e y_1 & v_e z_1 & 1 \\ v_e x_2 & v_e y_2 & v_e z_2 & 1 \\ : & : & : & : \\ v_e x_n & v_e y_n & v_e z_n & 1 \end{bmatrix}$$

que verifica a situação da relação $V_e < 1$ ou $V_e > 1$ referida.

3. OUTRAS TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS INDUZIDAS PELA SUBMATRIZ 3 X 3 DA MATRIZ DE TRANSFORMAÇÃO GENÉRICA

As transformações geométricas elementares descritas, têm no caso da aplicação a formas em 3D, uma correspondência no estabelecimento dos tipos de projecção, nos termos inicialmente apresentados, descritos em 1.1 e desenvolvidos em 1.2 e 1.3 no artigo anterior.
De facto, os diferentes tipos de projecção correspondendo a diferentes relações objecto-observador-plano de projecção implicam também a manipulação do objecto, e portanto com base na submatriz (3 x 3) da matriz de transformação genérica.

3.1. *Projecção paralela ou cilíndrica e ortogonal*

Considerando a situação do observador a uma distância infinita do plano de projecção e sobre o eixo dos zz — projecção paralela ou cilíndrica e ortogonal (ver 1.2. no artigo anterior), a obtenção de projecções resume-se ao procedimento descrito em 2.1.2. no artigo anterior, após manipulações adequadas do objecto, neste caso rotações, isto é:

- Projecções Ortogonais Múltiplas: Rotações de 0º, 90º ou 180º
- Projecções Axonométricas: Outras Rotações

A representação da projecção em 2D, de acordo com o descrito em 1., obtém-se após multiplicação pela matriz $T_{P.O.}$
Assim:

$$T_{Proj.Paral.Ort.} = T_{Rot\,\beta} \times T_{Rot\,\alpha} \times T_{P.O.} \quad , \text{ onde:}$$

$$T_{Proj.Paral.Ort.} = \left[\begin{array}{ccc|c} \cos\beta & 0 & -\sin\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \times$$

$$\times \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \times \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|c} \cos\beta & \sin\alpha\sin\beta & -\sin\beta\cos\alpha & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ \sin\beta & -\sin\alpha\ \cos\beta & \cos\alpha\cos\beta & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \times T_{P.O.}$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|c} \cos\beta & \sin\alpha\sin\beta & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & 0 & 0 \\ \sin\beta & -\sin\alpha\cos\beta & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Assim, ter-se-á para cada um dos casos incluídos na Projecção Paralela Ortogonal:

a) projecções Ortogonais Múltiplas (Vistas)

As projecções ortogonais múltiplas correspondem a ângulos de 0º, 90º e 180º entre os eixos do referencial associado ao plano de projecção e os eixos do referencial associado ao objecto.

Assim, a matriz de transformação (seguida de representação por projecção ortogonal, a que se fez referência em 1.) para obtenção de projecções ortogonais múltiplas, obtém-se substituindo na matriz acima os valores dos ângulos α e β referentes a cada uma das vistas, tais que:

— alçado Principal: $\alpha = \beta = 0º$

$$T_{AP} = 1 \left|\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right|$$

que como seria de esperar (trata-se, digamos assim, da posição "de partida" em que o objecto é considerado para efeitos de obtenção de projecções ortogonais múltiplas), corresponde à matriz matriz $T_{P.O.}$ em 1.:

— planta (vista de cima): $\alpha = 90º$, $\beta = 0º$

$$T_{ALE} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

— alçado Lateral Esquerdo: $\alpha = 0^o$, $\beta = 90^o$

$$T_{ALE} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

— alçado Lateral Direito: $\alpha = 0^o$, $\beta = -90^o$

$$T_{ALD} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

— alçado Inferior (vista de baixo): $\alpha = -90^o$, $\beta = 0^o$

$$T_{AI} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

— alçado Posterior (vista de trás): $\alpha = -90^o$, $\beta = 0^o$

$$T_{AI} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Na Fig. 2-a) apresenta-se uma peça para a qual foram obtidas as novas matrizes de coordenadas transformadas, correspondentes ao Alçado Lateral Esquerdo e à Planta, por utilização das respectivas matrizes de transformação, e às quais correspondem as representações das Figs. 2-b) e 2-c), de acordo com as novas matrizes de coordenadas $\underline{C'}_{ALE}$ e $\underline{C'}_{Pl:}$

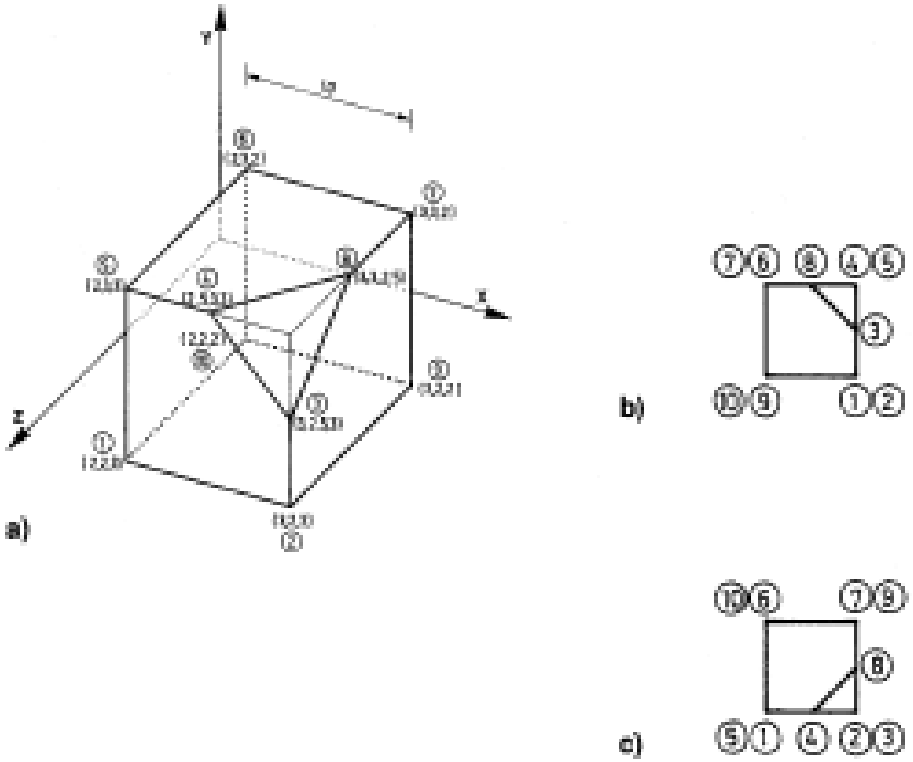


Fig. 2 - *Peça considerada (a) para a qual foram obtidas as matrizes de coordenadas a que correspondem o alçado esquerdo (b) e a planta (c).*

$C'_{ALE} = C \times T_{ALE}$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2{,}5 & 3 & 1 \\ 2{,}5 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2.5 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2{,}5 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 30 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 2{,}5 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} .1 \\ .2 \\ .3 \\ .4 \\ .5 \\ .6 \\ .7 \\ .8 \\ .9 \\ .10 \end{matrix}$$

e $C'_{PL} = C \times T_{PL}$:

$$C \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 0 & 1 \\ 2{,}5 & -3 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & -2{,}5 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} .1 \\ .2 \\ .3 \\ .4 \\ .5 \\ .6 \\ .7 \\ .8 \\ .9 \\ .10 \end{matrix}$$

b) Projecção Axonométrica

As projecções axonométricas identificam-se com relações observador-objecto--plano de projecção, às quais correspondem valores dos ângulos α e β tais que os resultados obtidos em termos de projecção são próximos das configurações estabelecidas na apresentação deste tipo de projecções.

No caso das projecções axonométricas Isométrica e Dimétrica (observador a uma distância infinita do plano de projecção), a deformação obtida por projecção sobre o plano referente a cada uma das direcções axonométricas, é tal que, ou pode desprezar-se (coeficiente de redução

próximo de 1.0 segundo as direcções x. y e z — Isometria), ou pode aproximar-se de um valor significativo, mas 'fácil" de operar e a ter em conta nas respectivas representações (caso do coeficiente 0.5 segundo uma das direcções — Dimétrica).

Na realidade, as deformações são em ambos os casos, da ordem de 80%. As aproximações que se convencionaram adoptar, são pois uma ligeira adulteração do que seriam os "verdadeiros" resultados a obter na representação de axonometrias, mas são por outro lado vantajosas do ponto de vista prático e em quase nada alteram as reais proporções segundo as várias dimensões do objecto a representar.

De qualquer forma estar-se-ia sempre no domínio da convenção sobre o modo como a peça se apresentaria, ou será que o observador se poderia colocar de facto a uma distância infinita?!

Os valores dos ângulos α e β correspondentes às projecções axonométricas e que adiante se apresentam, podem ser determinados a partir de expressões trigonométricas que relacionam por um lado a posição do objecto, isto é, os ângulos entre os eixos do referencial a este associado e os eixos do referencial associado ao plano de projecção; e por outro, a configuração com que se apresenta na respectiva projecção plana, isto é, os ângulos entre as direcções dos eixos de axonometria e uma linha de referência.

A sua determinação não será no entanto aqui demonstrada, apresentando-se apenas os seus valores:

— **Isométrica**: A isometria corresponde a uma posição do objecto, em que

$$\alpha = 35^{o}\ 16'$$
$$\beta = 45^{o}$$

e que por substituição na matriz respectivamente antes e depois da consideração da matriz T_{PO} conduz a:

$$T_{P.Iso} = \begin{bmatrix} 0{,}707 & 0{,}407 & -0{,}577 & 0 \\ 0 & 0{,}816 & 0{,}577 & 0 \\ 0{,}707 & -0{,}408 & 0{,}573 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0{,}707 & 0{,}408 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}816 & 0 & 0 \\ 0{,}707 & -0{,}408 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

— **Dimétrica**: De entre as posições possíveis do objecto no âmbito da dimetria, à mais utilizada correspondem os ângulos

$$\alpha = 19^{o}\ 27'$$
$$\beta = 27^{o}\ 41'$$

que por substituição na matriz $T_{Proj.Paral.Ort.}$ conduz a:

$$T_{P.Dim.} = \begin{bmatrix} 0{,}936 & 0{,}188 & -0{,}333 & 0 \\ 0 & 0{,}943 & 0{,}333 & 0 \\ 0{,}353 & -0{,}312 & 0{,}882 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0{,}936 & 0{,}118 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}943 & 0 & 0 \\ 0{,}353 & -0{,}312 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

respectivamente antes e depois da consideração da matriz $T_{P.O}$

— Trimétrica: A projecção axonométrica trimétrica contempla infinitas situações quanto à posição do objecto em relação ao plano de projecção. Não obstante haver algumas convencionadas como mais usuais, esta projecção é pouco utilizada pelo que se prescinde aqui de apresentar a respectiva matriz de transformação.

3.2. *Projecção paralela ou cilíndrica e oblíqua.*

Estão neste âmbito as Cavaleira, Gabinete e Militar, que se obtém a partir da consideração do observador a uma distância infinita do plano de projecção mas deslocado do eixo dos *ZZ*, por forma a estabelecer-se uma incidência oblíqua do feixe de projectantes sobre o plano de projecção, e para as quais a matriz de transformação antes e depois da consideração da matriz $T_{P.O}$ é a seguinte:

$$T_{p.Obl} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ V\cos\theta & -V\sin\theta & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ V\cos\theta & -V\sin\theta & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

que pode estabelecer-se por considerações geométricas a partir da direcção do feixe de projectantes em relação ao plano de projecção.
Os valores V e θ mais usuais são:

— Cavaleira: V = 1.0
θ = 45º

— Gabinete: V = 0.5
θ = 45º

— Militar: A projecção paralela e oblíqua militar constitui um caso particular de qualquer uma das anteriores em que considerando a posição de serviço do objecto como sendo a planta, o alçado principal; isto é. o plano de projecção passa a identificar-se como plano *zx* definido pelo referencial, em vez de *xy*.

Na Fig. 3 apresentam-se resultados da aplicação das matrizes de transformação referentes às projecções paralelas axonométricas, respectivamente isométrica (a) e dimétrica (b), referentes às projecções paralelas e oblíquas respectivamente cavaleira (a) e gabinete (b), da peça apresentada na Fig. 3-a).

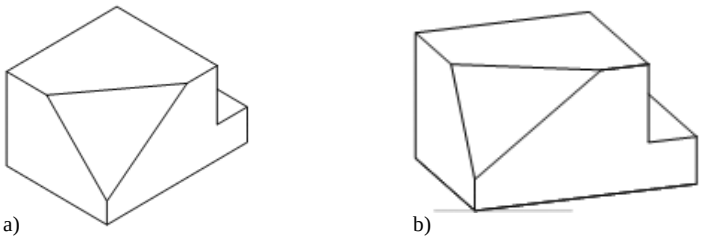


Fig. 3 - *Projecções axonométricas: a) Isométrica; b)Dimétrica.*

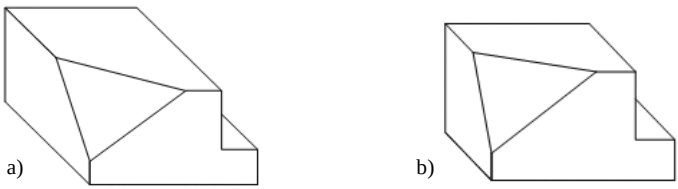


Fig. 3 — *Projecções paralelas e oblíquas: a) Cavaleira; b) Gabinete*

3.3. ***Transformações Geométricas induzidas*** *pela* ***submatriz 3 x 1 da matriz de transformação genérica: Projecção Central ou Cónica***

Conforme se referiu, são os coeficientes t_{14}, t_{24} e t_{34} da matriz de transformação genérica apresentada em 1. que estabelecem em relação à matriz de coordenadas inicial do objecto, a nova matriz de coordenadas transformadas correspondente a manipulações do objecto que se identificam com as possíveis relações objecto--observador-plano de projecção, que caracterizam a projecção central ou cónica. É este tipo do projecção que corresponde à conhecida perspectiva rigorosa, que aqui será apresentado em termos de tratamento matricial e que, por quantificação exacta de todos os elementos gráficos, permite o seu tratamento informático.
A matriz de transformação referente à projecção do tipo central ou cónica cuja forma é a seguinte:

$$\underline{T} = \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & t_{14} \\ 0 & 1 & 0 & t_{24} \\ 0 & 0 & 1 & t_{34} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right|$$

que permite o estabelecimento de uma projecção central de tipo paralela, angular ou oblíqua, isto é, envolvendo a consideração respectivamente de um, dois ou três pontos de fuga, o que em termos práticos corresponde a que para um observador a uma distância finita do plano de projecção, a posição do objecto é tal que respectivamente, apenas um, dois ou três eixos do referencial a este associado, intersectam o plano de projecção.
A representação no plano resulta de sequente Projecção Ortogonal e por conseguinte a partir da consideração da matriz $T_{P.O}$, o que conduz à matriz de representação da projecção central ou cónica:

$$\underline{T} = \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & t_{14} \\ 0 & 1 & 0 & t_{24} \\ 0 & 0 & 0 & t_{34} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right|$$

3.3.1. *Paralela*

Neste tipo de projecção central existe um só ponto de fuga estabelecido pela direcção perpendicular ao plano de projecção.
Considere-se então o sistema constituído pelo plano de projecção-objecto--observador conforme se apresenta na Fig. 4, com o objecto (cubo) situado no espaço real (situação mais simples e sem perda de generalidade).

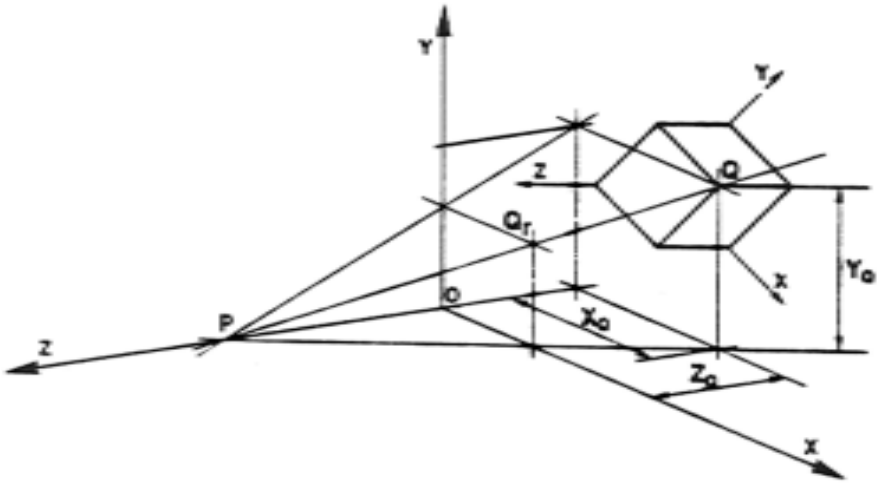


Fig. 4 — *Sistema plano de projecçao-objecto-observador.*

Considerando apenas um ponto, o procedimento para a obtenção de perspectivas é generalizável ao conjunto de pontos de qualquer objecto.
Considera-se então o ponto Q do cubo (Fig. 4), o ponto de vista P e as projectantes assim definidas.
À semelhança da verificação analítica de resultados da perspectiva rigorosa por recurso ao Teorema de Thales (Fig. 5-a), pode estabelecer-se a seguinte relação:

$$\frac{X_Q}{X_{Q_r}} = \frac{Z_P + Z_Q}{Z_P} \qquad X_Q = X_{Q_r}\left(1 + \frac{Z_Q}{Z_P}\right) \qquad X_{Q_r} = X_Q \frac{1}{\left(1 + \frac{Z_Q}{Z_P}\right)}$$

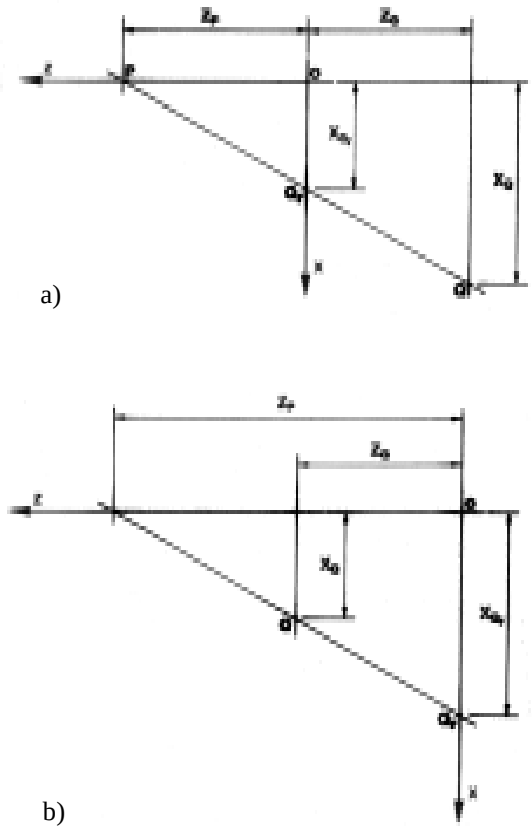


Fig. 5 — *Relação coordenadas iniciais / coordenadas transformadas para o objecto situado: a) no espaço real; b) no espaço intermédio.*

Em termos de produto matricial, ter-se-á

$$\begin{bmatrix} X_Q & Y_Q & Z_Q & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{Z_P} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_Q & Y_Q & 0 & 1+\frac{Z_Q}{Z_P} \end{bmatrix}$$

Mais uma vez se faz notar que a obtenção das coordenadas transformadas em coordenadas cartesianas obriga à divisão de cada linha de elementos da matriz (em coordenadas homogéneas) pelo respectivo elemento da última coluna, pelo que se terá:

$$\begin{bmatrix} x_{Q_T} & y_{Q_T} & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{X_Q}{1+\dfrac{Z_Q}{Z_p}} & \dfrac{Y_Q}{1+\dfrac{Z_Q}{Z_p}} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

de acordo com a relação estabelecida a partir da Fig. 5-a.
No caso de o objecto se situar no espaço intermédio (Fig. 5-b), a relação é semelhante, e tal que:

$$\frac{X_{Q_r}}{X_Q} = \frac{Z_p}{Z_p - Z_Q} \qquad X_{Q_r} = X_Q \frac{1}{1-\dfrac{Z_Q}{Z_p}}$$

donde se estabelece para a matriz de transformação:

$$T_{p.Cent.} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{1}{Z_p} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Faz-se notar que esta é a matriz que se adoptará como geral para a projecção central e paralela. Com efeito, a sua diferença em relação à matriz obtida na hipótese de o objecto se apresentar no espaço real, refere-se apenas ao sinal do coeficiente da posição t_{34}. Tal diferença é no entanto apenas aparente, dado que para o objecto situado no espaço real ou no espaço intermédio, a coordenada Z_Q de um ponto Q genérico, será respectivamente negativa ou positiva.
Convencionar a adopção do coeficiente t_{34} com o sinal 'menos' na respectiva matriz de transformação, isto é,

$$t_{34} = -\frac{1}{Z_P}$$

significa adoptar sempre (quer o objecto se situe no espaço real ou no espaço intermédio), o **valor relativo** das coordenadas segundo ZZ nos termos do referencial considerado (Fig. 4).
A situação do objecto no espaço virtual carece, neste âmbito, de interesse prático pouco significativo, pelo que não será considerada.

3.3.2. *Angular*

A projecção central ou cónica e angular que envolve dois pontos de fuga corresponde, como se sabe, a posições do objecto em que dois dos eixos do referencial a este associado, intersectam o plano de projecção.
Esta situação resulta de se considerar uma rotação em torno dos YY, pelo que a matriz para obtenção da projecção central angular considerando já a necessária projecção ortogonal, poderá ser estabelecida por:

$$T_{P.Ang.} = T_{Rotí} \times T_{P.Cent} =$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|c} \cos\beta & 0 & -\sin\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \times \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{Z_P} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|c} \cos\beta & 0 & 0 & \frac{\sin\beta}{Z_P} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\beta & 0 & 0 & -\frac{\cos\beta}{Z_P} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

3.3.3. *Oblíqua*

De modo análogo, o estabelecimento da matriz correspondente à projecção central e oblíqua que envolve a consideração de três pontos de fuga, isto é, o plano de projecção é intersectado pelos três eixos do referencial associado ao objecto, pelo que deverá também considerar-se uma rotação em torno dos XX, ou seja:

$$T_{PObL} = T_{Rot\,\beta} \times T_{Rot\,\alpha} \times T_{PCent} =$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|c} \cos\beta & 0 & -\sin\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \times \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\times \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{Z_P} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|c} \cos\alpha & \sin\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\sin\beta & \frac{\cos\alpha\sin\beta}{Z_P} \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & \frac{\sin\alpha}{Z_P} \\ \sin\beta & -\sin\alpha\cos\beta & \cos\alpha\cos\alpha & -\frac{\cos\alpha\cos\beta}{Z_P} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

4. MATRIZ PGP GERAL

A obtenção de uma perspectiva ”convincente” do ponto de vista de apresentação sugere a consideração do objecto posicionado a uma distância do plano zx definido pelo referencial associado ao plano de projecção, por forma a que o plano do horizonte “atravesse o objecto a meio” da sua dimensão média segundo y (considerado ainda na situação em que os eixos yy dos referenciais do plano de projecção e do objecto estão paralelos).

Sendo assim, torna-se conveniente a inclusão do coeficiente t_{42} nas matrizes apresentadas em 3., cujo valor deve ser diferente de zero, correspondendo à “elevação” a dar ao objecto segundo a direcção yy, isto é, uma transacção T_{yy} = h por forma a satisfazer o critério referido.

Assim e sintetizando as considerações ao longo de 2. e 3. a matriz de Projecções Geométricas Planas geral deverá assumir a forma:

$$T_{PGP} = \left[\begin{array}{ccc|c} \cos\beta & \sin\alpha\,\sin\beta & -\cos\alpha\,\sin\beta & \frac{\cos\alpha\,\sin\beta}{Z_P} \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & -\frac{\sin\alpha}{Z_P} \\ t_{31} & t_{32} & \cos\alpha\,\cos\beta & -\frac{\cos\alpha\,\cos\beta}{Z_P} \\ \hline 0 & h & 0 & 1 \end{array}\right]$$

em que:

$t_{31} = V \cos\theta$

$t_{32} = -V \sin\theta$, sendo V e θ definidos em 3.2,

com $\alpha = \beta = h = -\dfrac{1}{Z_P} = 0$ para a Projecção Paralela Oblíqua

e em que:

$t_{31} = \sin\beta$

$t_{32} = -\sin\alpha \quad \cos\beta$,

com α, β h e Z_P assumindo valores adequados para as restantes projecções.

No caso de se fazer incluir todas as translações (segundo XX, YY e ZZ) e também a rotação de um ângulo y em torno de Z, a matriz gerar T_{PGP} assumirá a forma seguinte:

$$T_{PGP} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & t_{34} \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} & t_{44} \end{bmatrix}$$

com:

$$t_{11} = \cos\beta \cos\gamma - \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$$
$$t_{12} = \sin\gamma \cos\beta + \sin\alpha \cos\gamma$$
$$t_{13} = -\sin\alpha \sin\beta$$
$$t_{14} = \frac{\cos\alpha \sin\beta}{Z_p}$$

$$t_{21} = \cos\alpha \cos\gamma$$
$$t_{22} = \cos\alpha \cos\gamma$$
$$t_{23} = -\cos\alpha \cos\gamma$$
$$t_{24} = -\frac{\sin\alpha}{Z_p}$$

$$t_{33} = \cos\alpha \cos\beta$$
$$t_{34} = \frac{\cos\alpha \cos\beta}{Z_p}$$

$$t_{41} = T_{xx}$$
$$t_{42} = T_{yy} = h$$
$$t_{43} = t_{zz}$$
$$t_{44} = 1 - \frac{T_{zz}}{Z_p}$$

e em que se tem:

$$t_{31} = V \cos\theta$$
$$t_{32} = -V \sin\theta \,,$$ para a projecção paralela e oblíqua.

e $$t_{31} = \cos\gamma \sin\beta + \sin\alpha \cos\beta \sin\gamma$$
$$t_{32} = \sin\beta \sin\gamma - \sin\alpha \cos\beta \cos\gamma \,,$$ para as restantes projecções.

Na Fig. 6 apresentam-se exemplos de projecções geométricas planas, para valores z_0 cujos resultados — Projecções Centrais ou Cónicas — se identificam com a vulgarmente designada Perspectiva Rigorosa.

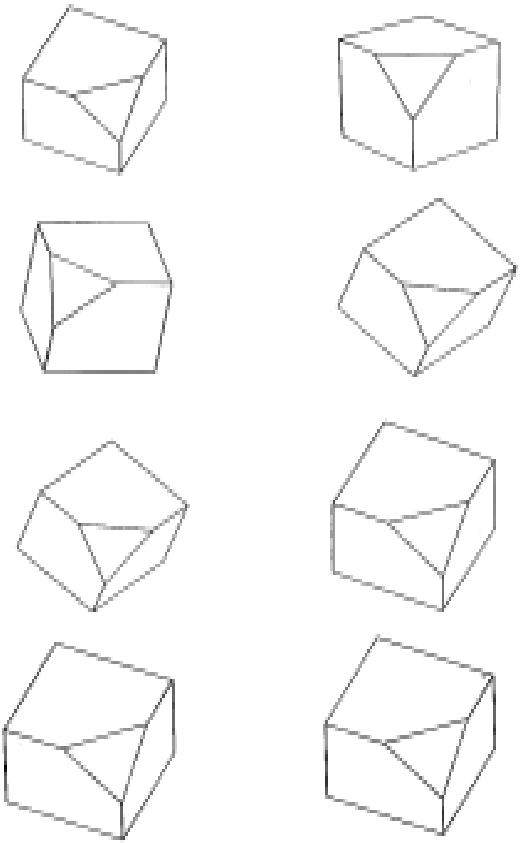


Fig. 6 - *Projecções Centrais da peça da Fig. 3 obtidos por recurso à matriz PGP geral.*

Ao processo de implementação computacional dos algoritmos de representação e transformação de formas 2D e em 3D de acordo com os processos de cálculo assim estabelecidos como constituintes das respectivas aplicações informáticas, sucedeu também o desenvolvimento de interfaces que tornaram "amigáveis" o desencadear de qualquer algoritmo de transformação e representação, limitando-o ao accionar de botões e indicação de opções do utilizador através de janelas de diálogo.

Neste âmbito, a própria construção do modelo geométrico (matriz de coordenadas e matriz de topologia) dispensa o estabelecimento prévio dessas matrizes na medida em que são constituídas interactivamente na conformidade do próprio "desenho" ou modelo que o utilizador vai desenvolvendo directamente no sistema informático. São pois estas a base da constituição e desenvolvimento de software de modelação geométrica como instrumentos de apoio à concepção, à representação e à visualização de formas, de conjuntos de formas e de um modo geral à simulação de objectos e de ambientes com o realismo que é hoje bem conhecido (Fig. 7).

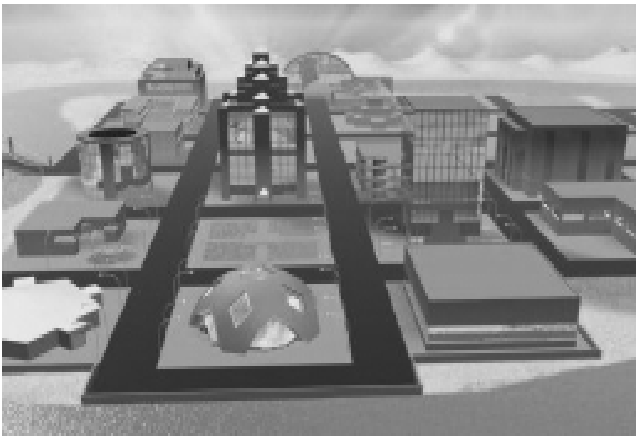


Fig. 7 - *Visualização de um Modelo 3D de plano urbanístico*:
River-City, ***A****utoria de 3DTRUE – 3D tools & software, Inc.*
(*in* www.3dtrue.com/max/downloads/river_city.jpg, acedido em 30 Maio 2006, 14:35)

Depois… a criatividade, a imaginação e a maior ou menor dedicação à modelação geométrica de formas com tanto detalhe quanto o desejado: a visualização em 2D (continua a ser em 2D, porque são ainda projecções planas mesmo que as designemos em 3D) de formas em 3D, existentes ou não, são também um modo de apoio à decisão. A simulação de diferentes soluções no âmbito da reconfiguração dos espaços e das formas como desígnios do desenvolvimento civilizacional, não só suscita maior criatividade na sua concepção, e apoio à decisão sobre as melhores soluções. Trata-se, pois, de um contributo inestimável para tornar o Mundo como um espaço de existência que se procura cada vez melhor. Era também este o propósito ao nível da definição dos espaços e das formas, já desde o Renascimento. Continua a sê-lo na Sociedade da Informação.

BIBLIOGRAFIA

Arnheim, R., "A dinâmica da Forma Arquitectónica", Ed. Presença, 1977.

Chen, J., "Guide to Computer Graphics Tools", Springer, 2002.

Ching, .,F., Architectute: Form, Space and Order, John Wiley & Sons, Inc, 1996.

E. Angel, "Interactive Computer Graphics: A Top-Down Approach with OpenGL", Addison-Wesley, 1999.

F.S.Hill Jr., "Computer Graphics Using OpenGL", Prentice-Hall, 2001.

Massironi, M., "Ver pelo Desenho", Edições 70, 1983.

P. Schreiber, "A New Hypothesis on Durer's Enigmatic Polyhedron in His Copper Engraving 'Melencholia I'," *Historia Mathematica*, 26, pp. 369-377, 1999.

P.C. Gasson, "Geometry of Spatial Forms, Analysis, Synthesis, Concept Formulation and Space Visison for CAD", Ellis Horwood, 1983.

Pirenne, M.H., "Vision and Eye", Chapman & Hall, London, 1971.

Ribeiro, C. T. e Pereira, V. F., "Conceber e representar com AutoCAD – O AutoCAD como uma aventura sem fim",Ed. McGraw-Hill, 1996.

Ribeiro, C. T., Geometria Projectiva - Conceitos, Metodologias, Aplicações, Ed. Europress, 1992.

S. Harrington, "Computer Graphics, A Programming Approach", McGraw-Hill, 1985.

Silva, A.; Ribeiro, C.T., Dias, J., Sousa, L., "Desenho Técnico Moderno", Ed. Lidel, 2004.