Haroun Katchi (*)
Professor Associado

101. **O problema**

Segundo a Teoria da Relatividade de Einstein, se uma pessoa parte a grande velocidade numa viagem de ida e volta a um outro sistema solar verifica, no regresso, que o seu irmão gémeo, que permaneceu na Terra, envelheceu muito mais que ele ou morreu mesmo há várias centenas de anos. Mas como, ainda segundo Einstein, todo o movimento é relativo, podemos considerar, inversamente, o viajante como imóvel e o seu irmão gémeo a deslocar-se no sentido oposto e a "regressar" menos envelhecido.
Como estas duas situações não podem ser simultâneamente verdadeiras, temos um paradoxo. Mas o paradoxo é aparente porque, como vamos ver, é o relógio do gémeo viajante que regista uma passagem de tempo menor quando se reencontram. Propomo-nos explicar os argumentos que conduzem a esta afirmação.
Ao longo dos anos, muito se tem escrito e discutido sobre este paradoxo e as suas variantes, tendo sido sempre muito poucos os detractores (alguns célebres) da teoria da relatividade e das suas conclusões.

102. **Desenvolvimento**

a. Deitando por terra um longo reinado de idéias aristotélicas, propôs Galileu que o "repouso" e o "movimento rectilíneo e uniforme" são condições

(*) Docente na Academia Militar das disciplinas de Análise Matemática III e IV.

"naturais" para um corpo material. Foi esta uma intuição genial, fundamentada nas suas experiências com esferas rolando sobre planos inclinados. Hoje, qualquer astronauta vogando pelo espaço em "queda livre" (i.e. com os motores da nave desligados) sabe que, se largar uma maçã "no ar", ela fica imóvel (em relação a si) e que se a atirar com um pequeno impulso, ela continua em movimento rectilíneo e uniforme até chocar com uma parede da nave. Newton incorporou na sua física aquele "princípio de inércia" de Galileu: um corpo mantém-se em repouso ou em movimento rectilíneo e uniforme se nenhuma força sobre ele actuar (1ª lei de Newton).

b. Designa-se por **referencial de inércia** aquele referencial em que a 1ª lei de Newton se cumpre (se houver uma aceleração da nave, a maçã não se comporta como foi descrito; passa a haver uma "força" que a empurra para trás; o referencial da nave passa a não ser de inércia).
   Admite-se a existência duma coordenada de tempo em relação ao qual todos os observadores (por definição imóveis no referencial) têm os relógios sincronizados. Um ponto desse referencial num instante de tempo é designado por um **acontecimento** (simboliza matematicamente algo que existe, ou acontece, num ponto do espaço e num instante de tempo: a colisão de duas partículas, a explosão duma estrela, etc). É traduzido por um conjunto de quatro números, três coordenadas de espaço e uma de tempo: (x,y,z,t).

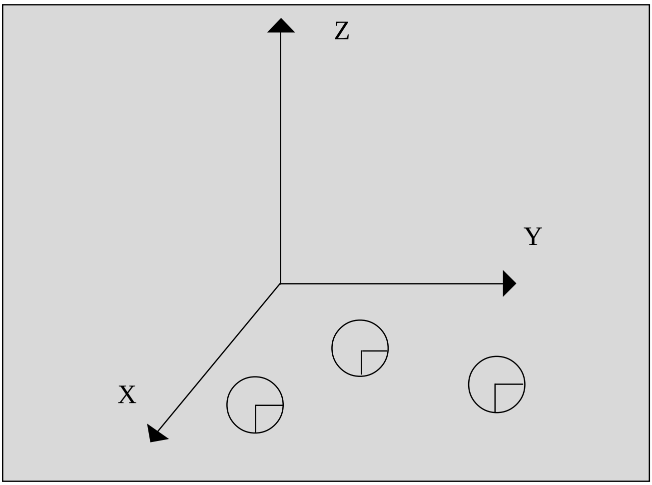

Figura 1 – *As coordenadas*

Dado um referencial inercial, todos os outros referenciais que se desloquem com movimento rectilíneo e uniforme em relação a ele serão também inerciais. Na física newtoniana, onde o conceito de tempo tem um carácter absoluto, todos os observadores podem manter os seus relógios sincronizados, quer pertençam, quer não, ao mesmo referencial de inércia. Como se transformam as coordenadas dum acontecimento quando se passa de um referencial para outro? Sejam S e S´ dois referenciais de inércia com velocidade relativa ***v***:

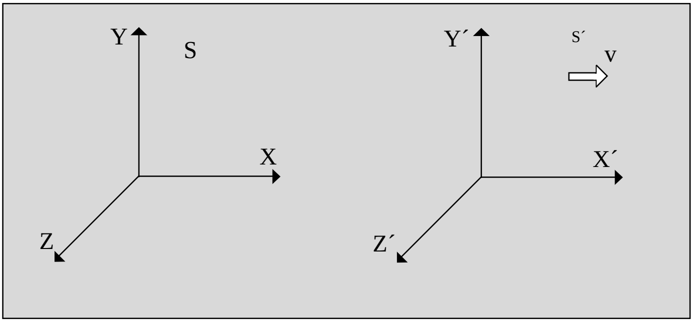

Figura 2 – *Os dois referenciais de inércia e a velocidade relativa* ***v.***

Para simplicidade, supomos que o eixo X´ se desloca ao longo do eixo X, conforme a figura indica, tendo-se sempre y=y´e z=z´. Suporemos também que no instante t=0 estes referenciais são coincidentes. Assim, as fórmulas que traduzem a mudança de coordenadas são:

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

designadas, em conjunto, por ***Transformação de Galileu***. A última igualdade retrata a natureza absoluta do conceito de tempo na física newtoniana, a que já fizemos alusão: o tempo "flui ao mesmo ritmo" para todos os observadores.

c. Em 1905 Einstein apresentou a sua Teoria da Relatividade Restrita, em resposta a certas dificuldades a que a física chegara, relacionadas com a electrodinâmica e com a propagação das ondas luminosas. Estabeleceu, como primeiro princípio, que **nenhuma experiência física realizada no interior dum referencial inercial permite detectar o seu movimento em relação a outro referencial inercial** (repare-se, a propósito, na nossa capacidade de sentir uma aceleração, *mas não uma velocidade*, ao viajar de avião ou no arranque suave do comboio). Estipulou ainda um segundo princípio, nada de acordo com o nosso senso comum; imaginemos que num comboio a 50 km/h um passageiro atira uma bola para a frente a 2 km/h em relação a ele; então a bola desloca-se a 52 km/h em relação a mim, que fiquei imóvel na plataforma. É uma simples lei de composição de velocidades, que podemos deduzir da transformação de Galileu. Ora, Einstein veio dizer-nos que esta lei está errada. Mais precisamente, diz ele e é este o seu segundo princípio: **se medirmos a velocidade da luz em qualquer referencial de inércia, obtemos sempre o mesmo valor *c* (cerca de 300000 quilómetros por segundo), independentemente do movimento da fonte emissora**.

Quer dizer que, se em vez da bola, o passageiro tivesse acendido uma lanterna, tanto em relação a ele como em relação a mim, a frente de onda se afastaria a 300000 km/s! Esta lei da "invariância da velocidade da luz" acaba por ter implicações profundas e subversivas nas nossas ideias comuns de espaço e de tempo. De facto teremos, em particular, que dissipar a ideia, aparentemente tão natural, de que existe um tempo que "flui de igual modo" para todos nós, independentemente do nosso estado de movimento relativo. O espaço e o tempo deixarão de ser duas entidades completamente separadas e passarão a fazer parte duma entidade mais fundamental, o *espaço-tempo*.

d. **Vejamos como, da teoria de Einstein, decorrem dois factos importantes.**

1) <u>A velocidade da luz é uma barreira intransponível</u>: nenhum objecto pode deslocar-se a essa velocidade em relação a qualquer observador. De facto, imaginemos que um ocupante ***A*** duma nave espacial emite um raio luminoso para a frente; este afasta-se de ***A*** cada vez mais porque se propaga à velocidade ***c.*** A nave ultrapassa outra, cujo ocupante ***B*** mede essa luz a afastar-se de si igualmente à velocidade ***c*.** Como ***A***

não ultrapassa a frente de onda, a sua velocidade, medida por ***B***, tem que ser <u>menor</u> que ***c*.**

2) <u>A simultaneidade não é um conceito absoluto</u>: dois acontecimentos simultâneos para um observador ***A*** não são simultâneos para um observador ***B*** que se desloque em relação a ***A*.** Isto significa que é impossível atribuir um sentido universal ao meu "agora". Justifiquemo-nos; suponhamos que, num comboio em movimento, ***B*** está posicionado no meio duma carruagem e acende uma luz. Como esta se propaga à velocidade ***c*** para qualquer observador, ele observa que ambas as

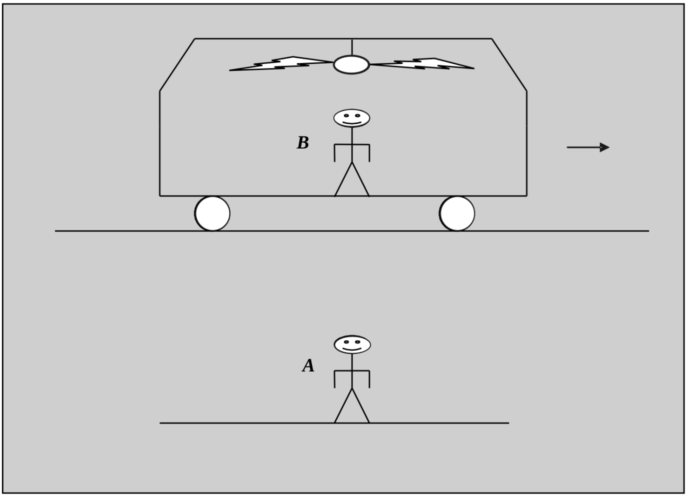

Fig. 3 – *A simultaneidade não é um conceito absoluto*

extremidades da carruagem se iluminam simultaneamente. Que opinião terá o observador ***A*** imóvel na plataforma? Para ele, a velocidade de propagação da luz também é ***c***, mas ele vê a extremidade direita da carruagem a afastar-se da frente de onda e a esquerda a aproximar-se; portanto é a extremidade esquerda a iluminar-se primeiro. Conclusão: a afirmação de que dois acontecimentos são simultâneos só tem sentido se especificarmos, ou se estiver implícito, o referencial em que nos situamos!

e. Na teoria de Einstein a transformação de Galileu já não é válida; é substituída pela ***Transformação de Lorentz*** (dedutível dos seus dois princípios):

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \dfrac{t - v\dfrac{x}{c^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$$

Estas equações desempenham um papel fundamental na estrutura matemática da teoria, como veremos em seguida, ao deduzirmos, quantitativamente, várias consequências experimentalmente verificáveis. Note-se que, para valores de ***v*** muito pequenos em relação à velocidade da luz, a transformação de Lorentz quase não se distingue da transformação de Galileu, pelo que no nosso mundo quotidiano de pequenas velocidades continuamos a empregar a física de Newton.

f. **Dedução das consequências**

Subentender-se-á que os referenciais com que tratamos são sempre inerciais.

(1) Contracção dos comprimentos. Suponhamos que um observador ***A*** está em repouso num referencial **S** e um observador ***B*** está em repouso num referencial **S´**, o qual se move com uma velocidade ***v*** constante em relação a **S**.

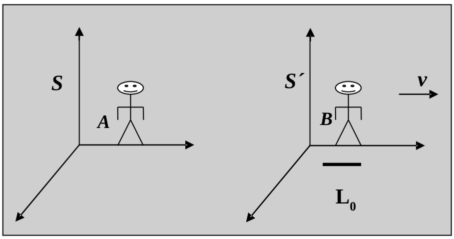

Fig. 4 – *A contracção dos comprimentos*

Então, uma barra rígida em **S´**, colocada na direcção do movimento e de comprimento $\mathbf{L_0}$ segundo o observador ***B***, que comprimento tem segundo o observador ***A***? Sejam $\mathbf{x'_1}$ e $\mathbf{x'_2}$ as coordenadas dos extremos da barra em **S´**. ***A*** determina o comprimento **L** da barra calculando os correspondentes valores no seu referencial, $\mathbf{x_1}$ e $\mathbf{x_2}$, simultaneamente ($t_1 = t_2$). Tem-se então

$$x'_2 - x'_1 = L_0 = \frac{x_2 - vt_2 - x_1 + vt_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

e, sendo $L = x_2 - x_1$ e $t_2 = t_1$, vem

$$L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Como esta raiz quadrada é <u>sempre menor que 1</u>, o comprimento **L** é <u>sempre menor</u> que $\mathbf{L_0}$; este é o fenómeno conhecido por "**contracção de Lorentz**". Para o observador *A* a barra tem um comprimento menor que L_0. Não se trata duma ilusão, pois é um resultado deduzido das premissas da teoria.

(2) <u>Dilatação do tempo</u>. Consideremos agora um relógio em **S´** que marca o tempo $\mathbf{t'_1}$ e um pouco mais tarde o tempo $\mathbf{t'_2}$. São dois acontecimentos que têm lugar no mesmo ponto do espaço ($x'_2 = x'_1$) e que estão separados no tempo pelo intervalo $\mathbf{T_0 = t'_2 - t'_1}$. Qual é o intervalo de tempo que separa estes dois acontecimentos, segundo o observador ***A*** em **S**? Resolvendo em ordem às variáveis x,y,z,t, o sistema que define a transformação de Lorentz (o que é equivalente, dada a relatividade do movimento, a trocar x com x´, y com y´, z com z´e t com t´ e a substituir *v* por -*v*) obtém-se (omitimos duas das equações por serem desnecessárias):

$$\begin{cases} x = \dfrac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\[2ex] t = \dfrac{t' + v' \frac{x'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$$

Daqui resulta,

$$T = t_2 - t_1 = \frac{t'_2 + v\dfrac{x'_2}{c^2} - t'_1 - v\dfrac{x'_1}{c^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}},$$

isto é,

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$$

Vemos que **T** é <u>maior</u> que $\mathbf{T_0}$; este é o fenómeno da "**dilatação do tempo**": um relógio em movimento em relação a um observador atrasa-se, do ponto de vista deste observador.

g. Ambos os efeitos acima descritos são recíprocos: do ponto de vista de ***B***, agora considerado em repouso, são os objectos e os relógios de ***A*** que se contraem e que se atrasam, respectivamente; não existe contradição nestas afirmações. A pergunta "***Neste preciso momento não poderá um qualquer observador olhar para os relógios de A e de B e verificar qual deles na realidade está atrasado*?**" não tem sentido. Com efeito, o olhar não capta instantaneamente uma imagem, porque a luz se propaga com uma velocidade finita; mais não posso fazer do que confiar no resultado das minhas medições e dos meus cálculos, efectuados de acordo com regras bem definidas. De caminho, liberto-me do preconceito de que a natureza do espaço e do tempo correspondem às minhas ideias intuitivas.

h. Precisamos ainda de examinar uma questão que se liga estreitamente com a noção de simultaneidade. Retomando a imagem do comboio, suponhamos que em cada um dos extremos da carruagem existe um relógio que começa a trabalhar assim que a luz, proveniente da lâmpada que ***B*** acendeu, os atinge. Esses relógios, $\mathbf{R_1}$ e $\mathbf{R_2}$, começam portanto, a trabalhar ao mesmo tempo e marcarão sempre a mesma hora. Ora, já sabemos, dada a relatividade da simultaneidade, que para ***A*** os relógios estarão dessincronizados; pretendemos saber qual a diferença de tempo registada pelos dois relógios, segundo ***A***.

Não nos esqueçamos que, se para ***B*** o comprimento da carruagem é **L** (distância que, para ele, separa os relógios), então o comprimento da carruagem para ***A*** é,

$$L\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

Suponhamos que, para ***A***, a luz leva o tempo $\mathbf{t_1}$ até atingir o relógio de trás; então a distância que ela percorre (metade do comprimento da carruagem menos a distância então avançada pelo comboio) é:

$$\frac{1}{2}L\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}-vt_1$$

A luz percorre esta distância à velocidade ***c*.** Portanto

$$\frac{1}{2}L\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}-vt_1=ct_1$$

E se, novamente para ***A***, a luz leva o tempo $\mathbf{t_2}$ **(>$\mathbf{t_1}$)** até atingir o relógio da frente temos, por um raciocínio análogo,

$$\frac{1}{2}L\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}+vt_2=ct_2$$

Então,

$$t_1=\frac{L\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{2(c+v)} \qquad \text{e} \qquad t_2=\frac{L\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{2(c-v)}$$

Pelo que

$$T=t_2-t_1=\frac{Lv}{c^2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Ora, se a iluminação da parede de trás e da parede da frente da carruagem são dois acontecimentos que, no relógio de ***A*,** estão separados pelo intervalo de tempo **T**, então, como já sabemos, do ponto de vista de ***A*,** esses acontecimentos estão separados, num relógio de ***B***, de

$$T_0 = T\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{Lv}{c^2}$$

Conclusão: se $\mathbf{R_1}$ e $\mathbf{R_2}$ estão sincronizados para ***B***, então para ***A*** estão dessincronizados, estando $\mathbf{R_1}$ adiantado de $\frac{Lv}{c^2}$ segundos em relação a $\mathbf{R_2}$.

i. É claro que na nossa vida quotidiana, em que lidamos com velocidades incomensuravelmente menores que a da luz (e portanto v/c é praticamente nulo), os efeitos relativistas que temos estado a descrever não são detectáveis. Mas o facto é que a Relatividade Restrita tem sido amplamente comprovada, nomeadamente nas experiências realizadas de modo rotineiro nos aceleradores de partículas, onde electrões, protões, e outras partículas elementares, adquirem velocidades próximas da velocidade da luz.

103. O paradoxo – a discussão

Estamos agora, finalmente, apetrechados para discutir o paradoxo dos gémeos. Para ficarmos com uma ideia das grandezas em jogo, examinemos um caso concreto. Suponhamos que a Maria fica em Terra e que o Francisco, irmão gémeo, parte de viagem a um planeta longínquo, à velocidade **v=0,8c (80% da velocidade da luz)**. Esse planeta está à distância de **L=20 anos-luz** (um ano-luz é a distância que a luz percorre num ano; como termo de comparação, lembremo-nos que a luz do Sol leva cerca de oito minutos a chegar até nós e a da Lua um segundo!); tanto na ida como na volta, o Francisco desloca-se à velocidade ***v*.** Supomos, em acréscimo, que os períodos de aceleração (à partida, à chegada e na meia-volta) são muito pequenos em relação à duração total da viagem, pelo que são desprezáveis nos cálculos a efectuar. À Maria e ao Francisco associamos, respectivamente, os referenciais **S** e **S´**:

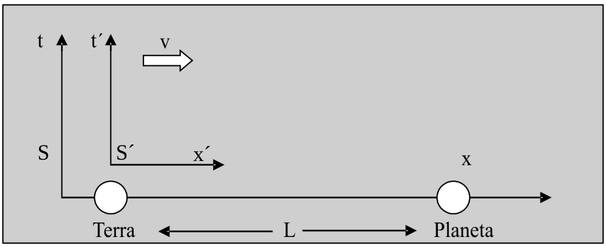

Fig. 5 – O paradoxo

Note-se que há uma assimetria entre os gémeos, relativamente ao planeta: este está imóvel em **S** e não em **S´**. No planeta vive, emigrado há muitos anos, o primo José; não havendo movimento relativo entre a Maria e o José, os seus relógios estão sempre certos um com o outro; façamos contas: a Maria tem coordenadas (x,t) e o Francisco (x´,t´). À partida acertam os seus relógios; vamos examinar, separadamente, as conclusões a que cada um chega, ao considerar-se a si próprio em repouso.

a. **Conclusões da Maria**

O Francisco está de partida neste momento. Os nossos relógios estão sincronizados: t=t´=0.

O meu irmão acaba de chegar ao planeta, pois o meu relógio marca 25 anos (como ele viajou a 80% da velocidade da luz, levou 20/0,8 =25 anos a lá chegar). Também sei calcular a hora que o relógio do meu irmão marca:

$$25\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = 25\sqrt{1-\frac{(0{,}8c)^2}{c^2}} = 25 \times 0{,}6 = 15 \text{ anos,}$$

já que qualquer relógio que se move com velocidade $\boldsymbol{v}$ em relação a mim sofre os efeitos da dilatação do tempo.

Terminada a estadia, o meu irmão encetou a viagem de regresso; acaba de chegar. Como a distância a percorrer foi a mesma, e à mesma velocidade, o meu relógio marca 25 x 2 = 50 anos e o dele 15 x 2 = 30 anos. O aspecto físico dele não engana. Parece que o seu tempo “levou menos vinte anos a passar”.

b. **Conclusões do Francisco**

A Maria está de partida (é essa para ele a descrição formal dos factos, pois do seu ponto de vista é ele que está imóvel). Os nossos relógios estão sincronizados: t=t´=0.

O planeta acaba de chegar a mim. Olho para o meu relógio e vejo que passaram 15 anos, o que está de acordo com os meus cálculos; as pessoas no referencial da Terra mediram a distância Terra-Planeta como sendo de 20 anos-luz, mas para mim o trajecto Terra-Planeta, tal uma barra rígida a deslocar-se, sofre uma contracção de Lorentz; portanto a distância que o planeta tem que percorrer até mim, uma vez iniciada a sua viagem à velocidade $\boldsymbol{v}$, é de

$$20\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = 20 \times 0{,}6 = 12 \text{ anos-luz;}$$

a 80% da velocidade da luz, o tempo de viagem é de 12/0,8=15 anos.

Também sei calcular quanto tempo passou no relógio do José (o que verificarei daqui a nada, depois de brindarmos à nossa saúde). O relógio dele andou mais devagar que o meu, devido ao fenómeno relativista da dilatação do tempo; logo, se o meu marca 15 anos, o dele deve marcar

$$15\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 15 \times 0{,}6 = 9 \text{ anos.}$$

Vou verificar. Com mil diabos! O relógio dele marca 25 anos! Onde é que está o gato? Ah! Já sei! Estava-me a esquecer dum facto importante: a relatividade da simultaneidade. De facto, no momento em que o sistema Terra-Planeta, qual uma carruagem de comprimento L=20 anos-luz, começa a deslocar-se em relação a mim à velocidade ***v*,** do meu ponto de vista os relógios da Terra e do planeta dessincronizam-se, ficando o do planeta adiantado de

$$\frac{Lv}{c^2} = \frac{20 \times 0{,}8c}{c^2} = \frac{20\text{x } 0{,}8}{c} = \frac{20 \text{ anos - luz}}{c} \times 0{,}8 = 20 \text{ anos} \times 0{,}8 = 16 \text{ anos.}$$

Como 16+9=25, fica tudo esclarecido.

Na outra metade da viagem as contas são precisamente as mesmas. Assim, quando a Maria já estiver ao pé de mim, no relógio dela terão passado 2x25=50 anos e no meu 2x15=30.

c. **Considerações finais**

(1) Vemos que as contas da Maria e do Francisco não levam a conclusões contraditórias sobre o resultado desta experiência imaginária, mas à previsão inequívoca de que "**o tempo passou muito mais devagar para o Francisco**".

(2) Façamos, finalmente, duas observações. A primeira é que o termo "relógio", aqui livremente empregue, se refere a qualquer processo físico que "registe a passagem do tempo"; o fenómeno da dilatação do tempo afecta tudo, incluindo os processos biológicos. A segunda é que a tecnologia actual ainda não permite lançar o Francisco a 80% da velocidade da luz.