

GERAÇÃO PARAMÉTRICA DE CURVAS: Splines e Curvas de Bézier



Carlos Tavares Ribeiro ()*
Professor Associado

Resumo

A modelação geométrica da configuração de curvas e de superfícies, metálicas, de materiais plásticos ou de materiais cerâmicos e de vidro, utilizadas nos diversos domínios industriais, devem ser definidas por critérios de estética ou de funcionalidade de acordo com requisitos dos dispositivos e equipamentos em que se inserem, por exemplo, de natureza aerodinâmica, ou requisitos relativos a condições ambientais em que esses equipamentos devem ser utilizados, por exemplo de agressividade química ou simplesmente de drenagem. Neste artigo, caracteriza-se um dos processos mais importantes de geração paramétrica de curvas, inevitavelmente por recurso a meios informáticos, e apresenta-se as bases da sua formulação matemática, para estabelecimento de algoritmos subjacentes ao respectivo processo de modelação geométrica.

1. Introdução

Ao longo de séculos, a utilização de réguas, esquadros e compassos foi praticamente a única instrumentação para estabelecer através de uma representação, mais especificamente através do desenho, a configuração de formas e objectos capazes de virem a tornar-se materialmente reais. As possibilidades de desenho neste âmbito, estavam praticamente limitadas a entidades rectilíneas e circulares. O desenho de outros tipos de linhas nomeadamente curvas não circulares, requeria

(*) Docente na Academia Militar das disciplinas de Desenho, Desenho II (civil) Desenho II (mecânica) e por protocolo na Universidade Aberta. Membro efectivo do CINAMIL.

um processo matemático analítico ou eram simplesmente desenhadas à mão livre como no desenho artístico.

No séc. XX, esta situação tornou-se um obstáculo à execução material de peças e objectos, em que determinadas curvas e superfícies deveriam ser definidas com precisão suficiente para poderem ser fabricadas industrialmente em materiais plásticos ou metálicos.

O desenvolvimento tecnológico a cuja expansão se assistiu ao longo do séc. XX em diversos domínios de actividade e sobretudo na sua múltipla relação, criou também um enquadramento para sucessivos novos desenvolvimentos e metodologias com reflexo mútuo em cada um deles. Em particular, o desenvolvimento da Informática, e mais especificamente o domínio da computação gráfica, suscitou a análise e o estabelecimento de algoritmos capazes de responder a esta necessidade específica de geração e traçado de curvas e de superfícies. Actualmente, a metodologia de traçado de curvas através da implementação de algoritmos de geração paramétrica de curvas em programas informáticos de desenho e projecto e de processamento de imagem em geral, são amplamente utilizadas no design industrial e conseqüentemente no fabrico de peças e objectos nos mais diversas indústrias, constituindo uma valiosa funcionalidade ao nível da concepção, com importante reflexo ao nível tecnológico e industrial. Desde as indústrias metalúrgicas e do vidro até às indústrias cerâmicas e dos plásticos, nomeadamente como fornecimento de produtos a indústrias mais abrangentes como as indústrias automóvel e aeronáutica, as metodologias de traçado de curvas têm possibilitado melhoramentos significativos em termos da qualidade e da inovação nos resultados e nos produtos obtidos. Na própria indústria de software, os interfaces para manipulação de curvas e de superfícies baseiam-se na sua própria conceptualização. Nos meios artísticos, especialmente na escultura e no design, e mesmo na arquitectura o traçado de curvas, tem possibilitado novas concepções volumétricas e novas configurações de superfícies.

2. Curvas de Bézier

Os algoritmos de geração de curvas e de superfícies de Bézier do âmbito da Computação Gráfica permitem gerar curvas com aparência “macia” (ou “adoçada” como por vezes também se diz). Matematicamente, são um caso particular do polinómio de interpolação de Hermite que utiliza a interpolação linear em linhas poligonais, pelo que as curvas são traçadas como uma sequência de segmentos cúbicos (polinómios de interpolação de grau 2, que utilizam derivadas nos extremos). Por sua vez, com base no polinómio de interpolação de Bernstein, a interpolação polinomial depende de pontos de controle. O desenvolvimento matemático é, pois, clássico mas deve-se a Pierre Bézier, um

engenheiro francês da Renault, que na década de 70, o introduziu no domínio da computação gráfica para a concepção e desenho de carrocerias de automóvel.

O traçado de curvas em 2D e de superfícies em 3D, pode ser gerado por equações cujas variáveis x , y referentes às sucessivas coordenadas de cada ponto a gerar, dependem das coordenadas x, y dos vértices de um polígono - no caso de curvas em 2D, ou de um sólido - no caso de superfícies em 3D, que com ela se relaciona e a determina a partir das posições dos seus vértices e consequentemente também da sua configuração (Fig. 1).

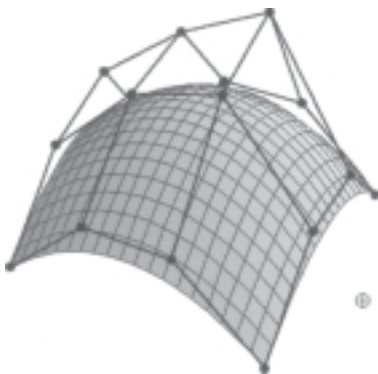


Fig. 1 - Geração de uma superfície de Bézier a partir de um sólido definido pelos seus vértices [in Ralph Martin 2002-09-20 www.cs.cf.ac.uk/Ralph/graphicspics/node15.html]

Estas curvas e superfícies caracterizam-se por não conterem os pontos de controle, isto é os vértices da poligonal com que se relaciona e que a condiciona, excepto o primeiro e o último vértices da poligonal, que são também pontos da curva, sempre contida na configuração convexa do polígono, e próxima do polígono de controle. Limita-se no entanto a apresentação desta formulação ao caso de representação em 2D e por conseguinte, apenas da geração de curvas.

O polinómio gerador é de grau $n-1$ sendo n , o número de vértices do polígono de controle. Assim, um polígono com 3 pontos gera uma curva de grau 2 (parábola), um polígono com 4 pontos gera uma curva de grau 3 (cúbica) e assim sucessivamente. Os sistemas informáticos permitem a sua geração e traçado de um modo interactivo e em tempo real, possibilitando a concepção de formas e a sua manipulação com vista à obtenção do melhor resultado, segundo critérios diversos, desde aspectos de ordem estética até aspectos funcionais, com aplicação nos mais diversos domínios da actividade humana.

No caso da geração de curvas em 2D, trata-se em geral, para as coordenadas x e y de uma dado ponto P da curva, de funções polinomiais do tipo:

$$X_p = f_1(X_0, X_1, X_2, \dots, X_{n-1}, t)$$

$$Y_p = f_2(Y_0, Y_1, Y_2, \dots, Y_{n-1}, t)$$

em que $X_0, Y_0, X_1, Y_1, X_2, Y_2, \dots, X_{n-1}, Y_{n-1}$ são as coordenadas dos vértices do polígono de controle e t um parâmetro gerador das coordenadas de pontos da curva, tantos quantos os valores do parâmetro t , considerados.

Estão neste âmbito além das curvas de Bézier as B-splines, as splines cúbicas, e as curvas de Ferguson, conceptualmente semelhantes e do mesmo tipo, diferindo apenas na formulação das funções polinomiais que as determinam.

2.1. Pontos de controle e geração de curvas

A configuração de curvas em 2D, parte do estabelecimento de uma linha poligonal, com a qual a configuração da curva a obter se relaciona. No caso de superfícies, deve estabelecer-se previamente não um polígono, mas um poliedro. Em ambos os casos as coordenadas dos vértices, e por conseguinte a configuração do poliedro, são determinantes da configuração da curva, ou da superfície, conforme os casos, constituindo-se como pontos de controle da sua configuração.

O algoritmo para tratamento numérico das equações paramétricas e a sua implementação em sistema informático para o caso de curvas de Bézier em 2D, verifica-se ser de formulação muito simples. Neste algoritmo permite-se, que interactivamente, possam ser definidas, por um utilizador, sucessivas posições (coordenadas) para qualquer ou para todos os vértices da poligonal, como que “puxando” por alguns dos pontos de controle do polígono de apoio, inicialmente estabelecido, que a condiciona, sendo, então, para cada caso, gerada uma nova curva.

Para a geração de curvas de Bézier é definido um polinómio interpolador em função de um parâmetro t , tal que:

$$P(t) = \sum_{i=0}^n C_i^n t^i (1-t)^{n-i} P_i$$

sendo t : parâmetro entre 0 e 1 correspondente a cada um dos pontos para traçado da curva.

n : Ordem do polinómio correspondente, condicionada por vértices do polígono de apoio.

C_i^n : Combinações de n , i a i , sendo i o índice referente ao número do vértice do polígono de apoio.

P_i : Coordenadas do vértice i do polígono de apoio.

Em 2D, o polinómio de Bézier estabelece duas componentes, segundo x e y , referentes às coordenadas de cada um dos pontos consonantes com os valores do parâmetro t considerados para traçado da curva, isto é:

$$x(t) = \sum_{i=0}^n C_i^n t^i (1-t)^{n-i} x_i$$

$$y(t) = \sum_{i=0}^n C_i^n t^i (1-t)^{n-i} y_i$$

Para uma poligonal de 4 vértices (pontos $i=0$, $i=1$, $i=2$ e $i=3$, e respectivos pares de coordenadas (x_0, y_0) , (x_1, y_1) , (x_2, y_2) e (x_3, y_3)) tem-se $n = 3$, e as expressões anteriores podem ser escritas como:

$$X(t) = (1-t)^3 x_0 + 3t(1-t)^2 x_1 + 3t^2(1-t)x_2 + t^3 x_3$$

$$y(t) = (1-t)^3 y_0 + 3t(1-t)^2 y_1 + 3t^2(1-t)y_2 + t^3 y_3$$

sendo $x(t)$ e $y(t)$ os sucessivos pontos da curva em função do parâmetro t , para cada conjunto de valores das coordenadas (x_0, y_0) , (x_1, y_1) , (x_2, y_2) e (x_3, y_3) dos vértices do polígono de apoio.

Assim, para o polígono da Fig. 2 cujas coordenadas x , y , dos vértices são:

Ponto i	x_i	y_i
0	1	0
1	2	3
2	6	5
3	7	0

as expressões para traçado da curva de Bézier respectiva, virão:

$$x(t) = (1-t)^3 + 6t(1-t)^2 + 27t^2(1-t) + 7t^3$$

$$y(t) = 9t(1-t) + 12t^2(1-t)$$

Os pontos da curva para $t = 0$ e para $t = 1$ (extremos do domínio do parâmetro t) são por natureza do polinômio de Bézier, pontos da curva. De facto para $t = 0$ virá $x(0) = 1, y(0) = 0$ e para $t = 1$ virá $x(1) = 7, y(1) = 0$.

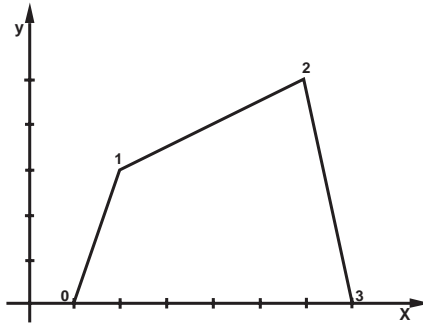


Fig. 2 - Polígono de apoio para obtenção de uma curva de Bézier de 3º Grau.

Considerando então mais três pontos equidistantes $t = 0.25, t = 0.5$ e $t = 0.75$, ter-se-á:

t	x(t)	y(t)
0.00	1.00	0.00
0.25	2.22	1.97
0.50	4.06	3.00
0.75	5.60	2.53
1.00	7.00	0.00

constituem-se assim as coordenadas x e y de cinco pontos da curva o seu traçado (Fig. 3).

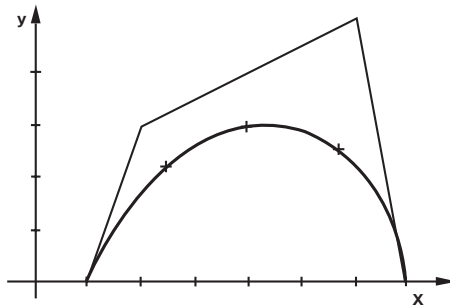


Fig. 3 - Curva de Bézier de 3º grau

2.2. Manipulação interactiva da geração de curvas

Por alteração das coordenadas de um vértice do polígono de apoio (como que “puxando-o” conforme se referiu) e recalculando o polinómio de Bézier (em computador é obviamente imediato) pode obter-se uma nova configuração da curva.

Na Fig. 4 exemplifica-se este resultado alterando o vértice 2 do polígono de apoio para as novas coordenadas $x_2 = 9$, $x_2 - 4$, obtendo-se para pontos da curva referentes aos mesmos valores de t :

t	$x(t)$	$y(t)$
0.00	1.00	0.00
0.25	2.64	1.83
0.50	5.13	2.63
0.75	7.05	2.11
1.00	7.00	0.00

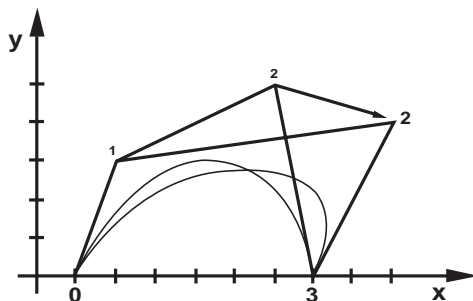


Fig. 4 -Nova Curva de Bézier de 3º grau após alteração de um vértice da polygonal da Fig. 1.

O processo de interacção pode inclusivamente assumir uma maior dinâmica na sucessão de configurações do polígono de apoio (Fig. 5).

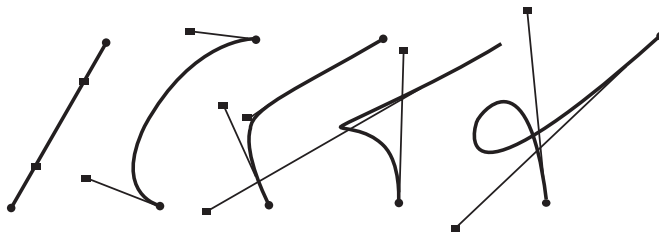


Fig. 5 -Sequência de interacção sobre os vértices do polígono de apoio na geração de curvas de Bézier

O estabelecimento de um algoritmo possível para traçado de curvas de Bézier e sequente implementação em computador, é relativamente simples, devendo obviamente prever-se valores de t com um incremento de ciclo para cálculo das equações $x(t)$ e $y(t)$ tanto menor, quanto maior o numero de pontos da curva, a unir por segmentos (de recta) que se pretenda obter. A geração de curvas fechadas pode ser obtida fazendo coincidentes o primeiro e o último pontos do polígono de controle. Considerando pontos de controle adicionais numa dada posição corresponde como que a incrementar o “peso” ou a “influência de atracção” da curva para esse ponto, “puxando-a” (Fig. 6).

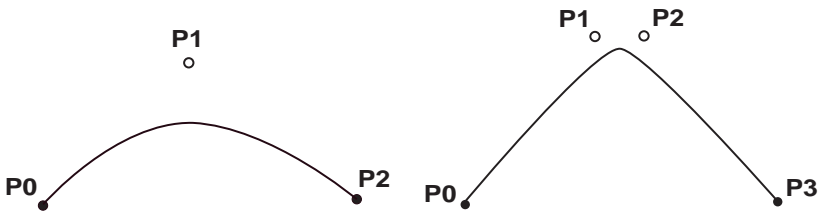


Fig. 6— Tipo de modificação na geração de uma curva, por inclusão de um vértice adicional (novo vértice 2) no polígono de apoio

À medida que sejam considerados mais pontos de controle, é necessário recorrer a polinómios de grau sucessivamente superior e de acordo com a formulação descrita calcular factoriais de maior valor nas expressões de análise combinatória inerentes às expressões polinomiais. Por isso, recorre-se por vezes à geração de sucessivas curvas de grau menor que se justapõem constituindo uma curva mais longa.

Este procedimento revela-se também útil ao nível do controle local, por forma a que a mudança de um ponto de controle não afecte a configuração de toda a curva mas apenas uma zona bem localizada. E para a união das curvas, uma vez que cada uma contém sempre os pontos inicial e final do polígono de apoio, é fácil ajustar cada curva como um troço da curva total, bastando para tal, que a tangente no ponto final de uma tenha a direcção da tangente no ponto inicial da que se lhe deve justapor (Fig. 7).

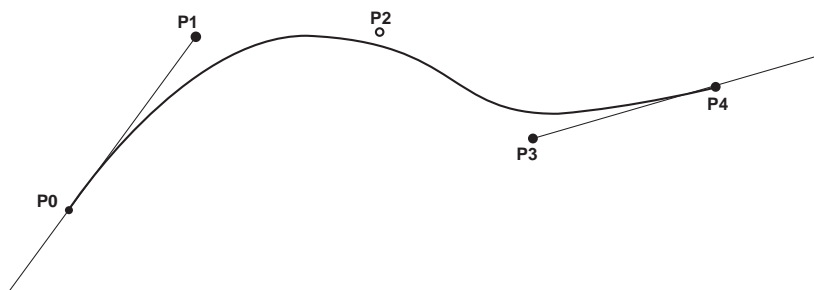


Fig. 7 - Determinação de tangentes em pontos extremos de uma curva para justaposição de outras curvas

A algoritmização da formulação matemática descrita pode conduzir ainda a outras situações do tipo que se exemplifica (Fig. 8) conforme o polígono de apoio seja aberto ou fechado, e para as quais se apresentam o polígono de apoio e a curva que gera.

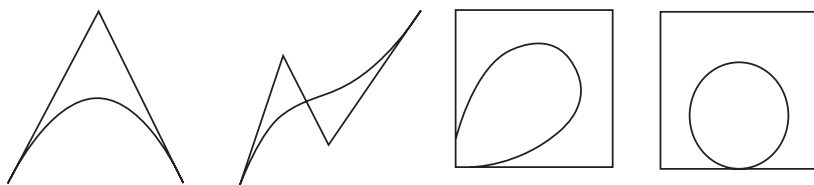


Fig. 8 - Particularidades na geração de curvas de Bézier, relativamente ao polígono de apoio a partir do qual é gerada a curva, ser aberto ou fechado.

3. Generalização da aplicação de *apures* e curvas de Bézier

A geração paramétrica de *splines* e de curvas de Bézier, para além da aplicação no *design* industrial tem permitido aplicações em situações mais correntes como o *design* de comunicação, inclusivamente na criação de logótipos (Fig. 9). O seu desenvolvimento tem contudo vindo a permitir a sua generalização a outros domínios que envolvem, directamente, o recurso ao desenho.



Fig. 9 - O traçado da "crava" que constitui o "C" integrado no actual símbolo do CINAMIL, é um exemplo de utilização de curvas de Bézier no *design* de comunicação.

Na topografia e na cartografia possibilitando a geração semi-automática de curvas de nível - neste caso, segundo uma outra formulação em que o traçado da curva contém os vértices do polígono de apoio definidos pelos pontos de cota conhecida (Fig. 9), mas também ao nível da arquitectura e da construção. Neste âmbito cabe referir um outro importante aspecto no traçado de curvas que é, *em* qualquer processo de composição, a sua relação com as direcções horizontal e vertical. Se num âmbito global, e em qualquer outro domínio de concepção da configuração de formas, o traçado de curvas pode ser assumida de forma livre e dispensando elementos de referenciação, nos domínios da arquitectura e da construção revelam-se necessidades de referenciação e de afinidade segundo direcções dominantes entendidas como horizontal e vertical, e por vezes um carácter balanceado e tendencialmente simétrico sugestivo de estabilidade. Cada efeito mesmo quando estas direcções *não* estão explícitas, os modos de percepção apreendidos ao longo da vida tendem a atribuir um sistema de coordenadas, no mínimo uma relação de predominância da direcção vertical ou da direcção horizontal. Embora este processo seja mais imediato relativamente a direcções rectilíneas, permitindo, à partida, caracterizá-las de modos inequivocamente diferentes, no caso das curvas, este aspecto também se evidencia em função da noção intuitiva da gravidade - “para cima ou para baixo”. O traçado de curvas e no contexto do desenvolvimento e da generalização para curvas e superfícies em 3D, da formulação apresentada para o caso de curvas em 2D condicionadas pela configuração dos polígonos de apoio que a geram, também no domínio da arquitectura, se revela, por isto mesmo, de interessante possibilidade de análise ao nível da concepção (Fig. 10).



Fig.10 - O Museu Guggenheim de Bilbao constitui um exemplo da utilização na arquitectura do traçado de curvas e de superfícies do tipo descrito

BIBLIOGRAFIA

- Bartley, Curtis, (1997), “Forward Difference Calculation of Bezier Curves”, *C/C++ Users Journal*, November 1997, pp. 19-26.
- Bourke, Paul, (1996), *Bezier curves*,
(disponível *online* em <http://www.swin.edu.au/astronomy/pbourke/geometry/bezier/>)
- Burden, Richard L. and J. Douglas Faires, (1989) *Numerical Analysis, Fourth Edition*, Boston PWS-KENT Publishing Company.
- Campione, Mary and Kathy Walrath (1996), *The Java Tutorial: Object-Oriented Programming for the Internet (Java Series)*, Reading, Massachusetts : Addison-Wesley Publishing Company (disponível *online* em <http://java.sun.com/docs/books/tutorial/>).
- Deslierres, Michel, (1997), *Calculation of Forward Differences with Matlab*, GEMEAP,
- Flanagan, David, (1997), *Java in a Nutshell, Second Edition*, Cambridge, O’Reilly & Associates, Inc.
- Gilles Bertrand et al., *Discrete Geometry for Computer Imagery, Proceedings of the 8th International Conference, DGCI’99*, Marne-la-Vallee, France, March 1999
- Graphics, Visualization & Usability Center, (1997), *Multimedia Courseware for Computer Science Education*, Georgia Institute of Technology. (disponível *online* em: <http://www.cc.gatech.edu/gvulmultimedia/nsfmmedia/>)
- Marsh, Duncan, *Applied Geometry for Computer Graphics and CAD*, Springer Verlag, 1999 Mortenson, M. E., *Mathematics for Computer Graphics Applications* Industrial Press, 1999 Université de Moncton, Working Paper #041097.
- van Hoff, Arthur, Sami Shaio and Orca Starbuck, (1996), *Hooked on Java*, Reading, Massachusetts : Addison-Wesley Publishing Company.

Sítios na Internet

www.math.ube.ca/~cass/gfx/bezier.html

truetex.com/bezint.htm

graphics.cs.ucdavis.edu/CAGDNotesBezier-CurvesBezier-Curves.html

www.powerpointworkbench.com/html/3d_catchment.html#Top

[graphics.cs.ucdavis.edu/GraphicsNotes/ Bezier-Curves/Bezier-Curves.html](http://graphics.cs.ucdavis.edu/GraphicsNotes/Bezier-Curves/Bezier-Curves.html)
scilabsoft.inria.fr/doc/demos_html/node242.html
[www.mapleapps.com/powertools/calcProjects/ calc2honors/HP9-bezierCurves.pdf](http://www.mapleapps.com/powertools/calcProjects/calc2honors/HP9-bezierCurves.pdf)
www.cl.cam.ac.uk/Teaching/2000/AGraphHCI/SMEG/node3.html
www.frontiemet.net/-imaging/nurbs.html
[www.quickceph.com/gcip/bezier curves.html](http://www.quickceph.com/gcip/bezier%20curves.html)
www.eazydraw.com/stylize.htm
www.desktoppublishing.com/vectorapps.html
home.tiscali.be/piet.verplancken3/bezier/node9.html
medialab.di.unipi.it/web/IUM/Waterloo/node137.html

Sítios na Internet com demonstração de geração interactiva de curvas de Bézier

www.math.ucla.edu/~bakerljavalhoeferBezier.htm
www.cse.unsw.edu.au/~lambert/splinesBezier.html
www.moshplant.com/direct-or/bezier/bezier.html
www.cs.tehnion.ac.il/~cs234325/Homepage/Applets/applets/bezierGermanApplet.html
homepages.borland.com/efg2lab/Graphics/Jean-YvesQueinecBezierCurves.htm
DELPHI